第二章　线性方程组（Systems of Linear Equations）

n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$, m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若将 $x_1 = c_1,\cdots,x_n = c_n$ 代入上述方程等式都成立，则称 $(c_1\cdots c_n)$ 为该方程组的一组解 (solution) 。

几个基本问题：

- 方程组是否存在解？如果有解，有几个解？
- 如何求方程组的解？
- 解的公式表示。
- 解的几何结构 (如一个二元一次方程表示一条平面直线) 。

§2.1　Gauss 消元法

基本思想: 将方程组三角化，再回代求解.

例 2.1

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & ① \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & ② \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 & ③ \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & ④ \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 & ⑤ \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & ⑥ \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & ⑦ \\ -7x_2 - x_3 = -15 & ⑧ \\ -7x_2 - 7x_3 = -21 & ⑨ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{⑨-⑧} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ -7x_2 - x_3 = -15 \\ 6x_3 = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{取代}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ -7x_2 = 14 \\ x_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

例 2.2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_4 & = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 19x_4 & = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 24x_4 & = 7 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ -3x_3 - 9x_4 = 4 \\ -9x_3 - 29x_4 = 12 \\ -11x_3 - 36x_4 = 16 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ \qquad\qquad -3x_3 - 9x_4 = \ \ 4 \end{cases}$$

$$令 \begin{cases} x_2 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 = 2t_1 + 5t_2 \\ x_3 = -\dfrac{4}{3} - 3t_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2t_1 + 5t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -\dfrac{4}{3} - 3t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$

三个基本变换：

(1) 交换两个方程； $\quad$ ⓘ $\leftrightarrow$ ⓙ

(2) 某个方程乘一个非零常数； $\quad c \times$ ⓘ

(3) 某方程乘一非零常数加到另一个方程. $\quad c \times$ ⓘ+ ⓙ

定理 2.1 三个基本变换将方程组变为同解方程组，因此不会产生增根.

§2.2 Gauss 消元的矩阵表示

解方程组的时候，变元不参与运算，因此可以省去变元.

重新考虑例 2.1

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -1 & -15 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

于是例 2.1 种的线性方程组等价于

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ -7x_2 - 72x_3 = -21 \\ 6x_3 = 6 \end{cases}$$

两个进一步的例子.

重新考虑例 2.2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 19x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 24x_4 &= 7 \end{cases}$$

例 2.3: 无解实例

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 9x_2 + 9x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}$$

§2.3 一般线性方程组的 Gauss 消元解法

1. **算法描述**

2. **最终形式**

$$\begin{pmatrix} c_{11}\cdots c_{1,j_2-1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & c_{2j_2}\cdots c_{2,j_3-1} & \cdots & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & c_{r,j_r} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ & & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{pmatrix}$$

定理 2.2 线性方程组的解如下。

情形 1 $d_i \neq 0,\ i \in \{r+1, \cdots, m\}$, 方程组无解.
情形 2 $d_i = 0,\ i = r+1, \cdots, m$ 且 $r = n$, 方程有唯一解.
情形 3 $d_i = 0, i = r+1, \cdots, m,\ r < n$, 方程有无穷多解. $x_{j_1}, \cdots, x_{j_r}$ 为非独立未知数，其余为独立未知数 (共有 $n-r$ 个), 记为 $t_1, \cdots, t_{n-r}$. 则方程的通解可以写成 $t_1, \cdots, t_{n-r}$ 的线性组合.

对于齐次方程，只有情形 2 、 3 发生.

推论 2.1 齐次线性方程组有非零解充要条件为 $r < n$, 只有零解条件为 $\Leftrightarrow\ r = n$.
推论 2.2 若 $m < n$, 则齐次线性方程组一定有非零解.

回头看本章开头提出的几个基本问题：(1) 解的存在性与唯一性问题已解决；(2) 求解问题已解决；我们还需继续研究方程的公式解及解的几何结构.

对于 $n = 3$ 的情形，由于每个方程表示三维空间中的一个平面，因此方程组的解将是一些平面的交集，因此解集可以是一个平面，一条直线，一个点或空集. 这里，r 是决定解集的一个非常变更的量！

几个新的问题:

1. 如何从原方程组判别解的存在性、唯一性及多解？
2. 如何从原方程组直接确定 r?
3. r 是否唯一？
4. 解集的大小与 r 有何关系？
5. 直接从原方程获得解析 (公式) 解.

为研究方程组的解析 (公式) 解，我们将引入行列式的概念. 为研究方程组的解得属性 (存在性，唯一性等), 我们引入矩阵的运算 (特别是乘法运算). 为研究线性方程组的解集的结构，我们将引入线性空间的概念.

$$\boxed{\text{线性方程组}}$$
$$\downarrow$$
$$\text{--------- ---------- ----------}$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$\boxed{\text{行列式}} \qquad \boxed{\text{矩　阵}} \qquad \boxed{\text{线性空间}}$$

课堂作业:

1. 求下列线性方程组的通解:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$$

2. λ 为何值时，下列线性方程组有解？并求解：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

3*. 是否存在数域 F 使 $R \subset F \subset C$?