第四章　线性空间 (Linear Vector Space)

§4.1　n 维数组空间

每一个方程可以与一个 $n+1$ 维向量一一对应．因此，一个线性方程组对应于一组 $n+1$ 维向量．对方程组做初等变换对应于对向量做加、减、数乘等运算．

定义 4.1　n 维数组向量 (对平面、空间向量的推广) 及数组向量的运算：加、减、数乘．

运算法则 :(i) 加法交换律；　(ii) 加法结合律；　(iii) 分配律；

(iv) 零向量；　(v) 负向量；　(vi) 乘法结合；　(vii) $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

定义 4.2　线性组合与线性表示．

初等变换即对方程做线性组合．线性组合的线性组合仍为线性组合．

线性方程组可以表示为向量形式：

$$x_1\mathbf{a_1}+\cdots+x_n\mathbf{a_n}=\mathbf{b}.$$

其中 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_n},\mathbf{b}$ 为 m 维列向量．

齐次方程的通解可以表示为：

$$\mathbf{x}=t_1\beta_\mathbf{1}+\cdots+t_{n-r}\beta_\mathbf{n-r}$$

.

考虑集合：　$\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle:=\{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{a_i}|\ \lambda_i\in F\}$

该集合拥有性质：　$\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_k}\in\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{k}\mu_i\mathbf{b_i}\in\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle$.

定义 4.3　生成子空间与生成元．

生成子空间的几何考察．

$n=3$, $\langle\mathbf{a_1}\rangle=\{\lambda_1\mathbf{a_1}|\ \lambda_1\in F\}$ 一般表示一条直线，

$\langle\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\rangle=\{\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}|\ \lambda_1,\lambda_2\in F\}$ 一般表示一个平面，

$\langle\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\rangle=\{\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}+\lambda_3\mathbf{a_3}|\ \lambda_1,\lambda_2\in F\}$ 一般表示整个三维几何空间．

例 4.1　$\mathbf{a_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\mathbf{a_2}=\begin{pmatrix}5\\-5\\12\end{pmatrix}$, $\mathbf{a_3}=\begin{pmatrix}1\\-3\\6\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

问： $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3} \rangle$?

§4.2 线性相等与线性无关

考察下列线性方程组：

$$\begin{cases} l_1 := a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1 = 0 \\ l_2 := a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ l_m := a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n - b_m = 0 \end{cases}$$

如果 l_i 是其余方程的线性组合，即 $l_i = \sum\limits_{j \neq i} \lambda_j l_j$, 则去掉方程 $l_i = 0$, 原方程组与现方程组等价：

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ l_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_1 = 0 \\ \quad \vdots \\ l_{i-1} = 0 \\ l_{i+1} = 0 \\ l_m = 0 \end{cases}$$

此时称 $l_1, l_2, \cdots, l_m = 0$ 是线性相关的.

例 4.2 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 5z = 2 \\ x - 3y + 13z = 1 \end{cases}$ 是否线性相关？

解： $l_1 = x + y + z - 1,\ l_2 = 2x + y + 5z = -2,\ l_3 = x - 3y + 13z - 1 = 0.$
设 $l_3 = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2$, 则

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -3 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = 13 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -7 \\ \lambda_2 = 4. \end{cases}$$

$l_3 = -7l_1 + 4l_2.$

由于方程与向量一一对应，因此可以类似定义数组向量的线性相关性.

定义 4.4 设 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\in F^n$. 如果 $\exists i$ 及 $\lambda_j\in F(j\neq i)$ 使 $\mathbf{a_i}=\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j\mathbf{a_j}$, 则称 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 线性相关，否则，称它们线性无关.

重新考察例 4.2 设 $\mathbf{a_1}=(1,1,1,1)$, $\mathbf{a_2}=(2,1,5,2)$, $\mathbf{a_3}=(1,-3,13,1)$. 则 $\mathbf{a_3}=-7\mathbf{a_1}+4\mathbf{a_2}$. 因此 $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ 线性相关.

由于

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mathbf{a_j}=0,\ 某个\ \lambda_i=1\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\mathbf{a_j}=0,\ 某个\ \lambda_i\neq 0$$

因此有

定理 4.1 设 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\in F^n$, 则 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\exists$ 不全为零的常数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{a_i}=\mathbf{0}$.

例 4.3 问向量 $\mathbf{a_1}=(1,1,1)$, $\mathbf{a_2}=(2,1,5)$, $\mathbf{a_3}=(1,-3,13)$ 是否线性相关？

解: $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}$ 线性相关 $\Leftrightarrow\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}+\lambda_3\mathbf{a_3}=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&5\\1&-3&13\end{vmatrix}=0.$

因此， $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}$ 线性相关.

几条基本性质：

(1) 含零向量的向量组线性相关，特别 $\mathbf{0}$ 向量线性相关.

(2) 部分相关 $\Rightarrow$ 整体相关.

(3) 整体无关 $\Rightarrow$ 部分无关.

例 4.4 设 $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}\in\mathbb{R}^3$. 则

$\mathbf{a_1}$ 与 $\mathbf{a_2}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a_1}=\lambda\mathbf{a_2}$ 或 $\mathbf{a_2}=\mu\mathbf{a_1}$, 即 $\mathbf{a_1}//\mathbf{a_2}$

$\mathbf{a_1}$ 与 $\mathbf{a_2}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a_1}\nparallel\mathbf{a_2}$

$\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中一个向量是另两个的线性组合, 不妨设 $\mathbf{a_3}=\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ 共面.

$\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ 不共面.

定理 4.2 $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某个 $\mathbf{a_i}$ 是它前面的向量的线性组合.

定理 4.3 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\lambda_1\mathbf{a_1}+\cdots+\lambda_m\mathbf{a_m}=0$ 有非零解.

(1) $m>n$, $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 线性相关.

(2) $m=n$, $\det(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m})=0$.

(3) $m<n$ $\Leftrightarrow$ $\text{rank }(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m})<m$ $\Leftrightarrow$ $(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m})$ 的所有 m 阶子式为零.

总结起来有

$\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}\in F^n$, $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某个 $\mathbf{a_i}$ 是其它向量的线性组合 $\Leftrightarrow$ 某个 $\mathbf{a_i}$ 是它前面的向量的一性组合 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $\lambda_1\mathbf{a_1}+\cdots+\lambda_m\mathbf{a_m}=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $\text{rank }(\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_n})<m$.

对应可以得到线性无关条件.

例 4.5 一些例子.

① $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ 共面 $\Leftrightarrow$ $\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=0$.

② $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\cdots,\mathbf{e_n}$ 线性无关.

③ $\mathbf{a_1}=(1,0,\cdots,0)$, $\mathbf{a_2}=(1,1,\cdots)$, $\cdots$, $\mathbf{a_n}=(1,\cdots,1)$ 线性无关.

④设 $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}$ 线性无关 $\Rightarrow$ $\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_2}+\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_3}+\mathbf{a_1}$ 线性无关.

⑤ $\mathbf{a_1}=(3,4,-2,5)$, $\mathbf{a_2}=(2,-5,0,-3)$, $\mathbf{a_3}=(5,0,-1,2)$, $\mathbf{a_4}=(3,3,-3,5)$ 是否线性相关？

解 $\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}+\lambda_3\mathbf{a_3}+\lambda_4\mathbf{a_4}=\mathbf{0}$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -5 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(2,1,-1,1)$, 即 $2\mathbf{a_1}+\mathbf{a_2}-\mathbf{a_3}-\mathbf{a_4}=\mathbf{0}$. 因此， $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3},\mathbf{a_4}$ 线性相关.

例 4.6 $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\in\mathbb{R}^3$. 设 $\mathbf{b_1},\mathbf{b_2}$ 是 $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上投影. 则 $\mathbf{b_1},\mathbf{b_2}$ 线性无关 $\Rightarrow$ $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}$ 线性无关. 反之不然.

定理 4.4 $\mathbf{a_1}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{r1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a_2}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{r2} \end{pmatrix}$, $\cdots$, $\mathbf{a_m}=\begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{rm} \end{pmatrix}$

及加长向量组

$$\mathbf{b_1}=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{r1}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix},\ \mathbf{b_2}=\begin{pmatrix}a_{22}\\ \vdots\\ a_{r2}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \mathbf{b_m}=\begin{pmatrix}a_{1m}\\ \vdots\\ a_{rm}\\ \vdots\\ a_{nm}\end{pmatrix}$$

则 $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}$ 线性无关 $\Rightarrow$ $\mathbf{b_1}\cdots\mathbf{b_n}$ 无关

$\mathbf{b_1}\cdots\mathbf{b_m}$ 线性相关 $\Rightarrow$ $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}$ 相关

接下来我们看看线性相关与生成子空间的关系．我们回忆

$\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_n}\rangle:=\{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{a_i}\Big|\ \lambda_i\in F\}.$

先在 $\mathbb{R}^3$ 中考虑：

$$\langle\mathbf{a_1}\rangle=\{\lambda_1\mathbf{a_1}|\ \lambda_1\in R\}=\begin{cases}0 & \mathbf{a_1}=0\\ \text{过原点直线} & \mathbf{a_1}\neq 0.\end{cases}$$

$$\langle\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\rangle=\{\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}|\ \lambda_1,\lambda_2\in R\}=\begin{cases}\mathbf{a_1}//\mathbf{a_2} & \text{直线}\\ \mathbf{a_1}\not\parallel\mathbf{a_2} & \text{过 }\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\text{ 平面.}\end{cases}$$

$$\langle\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\rangle=\begin{cases}\mathbf{a_1}//\mathbf{a_2}//\mathbf{a_3} & \text{直线}\\ \mathbf{a_1}\not\parallel\mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3}\text{ 位于 }\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\text{ 所决定的平面,} & \mathbf{a_1}\text{ 、 }\mathbf{a_2}\text{ 平面}\\ \mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2},\ \mathbf{a_3}\text{ 不共面} & \mathbb{R}^3\end{cases}$$

生成子空间的核心性质:

$$\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_l}\in\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle,\text{ 则 }\sum_{j=1}^{l}\mu_i\mathbf{b_j}\in\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle.$$

定义 4.5 $V\subset F^n$ 为非空向量集合，它满足

$$\text{若 }\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_l}\in V,\ \lambda_1,\ldots,\lambda_l\in F,\text{ 则 }\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\mathbf{a_i}\in V,$$

则称 V 为 F^n 的向量子空间.

显然 $\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle$ 为 F^n 的子空间, 称为 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 生成的子空间 (Subspace spanned by $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}$).

$\mathbb{R}^3$ 过原点的直线或平面为线性空间.

空间 $\langle\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}\rangle$ 的 "大小", 与 m 没有必然关系，与 $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}$ 相关性有关.

若 $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}$ 线性相关，设

$$\mathbf{a_i}=\sum_{j\neq i}\lambda_j\mathbf{a_j} \;\Rightarrow\; \langle\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}\rangle=\langle\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_{i-1}},\mathbf{a_{i+1}}\cdots\mathbf{a_n}\rangle$$

反之，亦然．即若 $\langle\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}\rangle=\langle\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_{i-1}},\ \mathbf{a_{i+1}}\cdots\mathbf{a_m}\rangle$, 则 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 线性相关.

相应地， $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 线性无关 $\Leftrightarrow\forall i,\ \langle\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}\rangle\neq\langle\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_{i-1}},\mathbf{a_{i+1}}\cdots\mathbf{a_m}\rangle$

对三维空间中向量，我们有

$\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}$ 线性相关 $\;\Leftrightarrow\; \mathbf{a_1}//\mathbf{a_2} \;\Leftrightarrow\; \dim\langle\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\rangle<2$

$\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}$ 线性无关 $\;\Leftrightarrow\; \mathbf{a_1}\nparallel\mathbf{a_2} \;\Leftrightarrow\; \dim\langle\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\rangle=2$

$\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}$ 线性相关 $\;\Leftrightarrow\;$ $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}$ 共面 $\;\Leftrightarrow\; \dim\langle\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\rangle<3$

$\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}$ 线性相关 $\;\Leftrightarrow\;$ $\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}$ 不共面 $\;\Leftrightarrow\; \dim\langle\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\rangle=3$

§4.3　极大无关组与秩

给定向量组 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$, 如果它们线性相关，设 $\mathbf{a_i}$ 可以用其它向量的线性组合表示，则有

$$\langle\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}\rangle=\langle\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_{i-1}},\ \mathbf{a_{i+1}}\cdots\mathbf{a_m}\rangle$$

即去掉 $\mathbf{a_i}$ ，剩下向量生成的空间不变。类似地，如果 $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_{i-1}},\ \mathbf{a_{i+1}}\cdots\mathbf{a_m}$ 线性相关，则可以进一步去掉其中一个向量而剩下向量生成的子空间不变。这个过程可以一直进行下去，直至剩下的向量组线性无关。一般地有，

$$\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle=\langle\mathbf{a_{i_1}},\cdots\mathbf{a_{i_r}}\rangle.$$

这里 $\mathbf{a_{i_1}},\cdots\mathbf{a_{i_r}}$ 线性无关。 $\mathbf{a_{i_1}},\cdots\mathbf{a_{i_r}}$ 称为 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 的一组极大无关组。

定义 4.6　(极大无关组) 设 $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}\in F^n$. 若 $\mathbf{a_{i_1}},\cdots,\mathbf{a_{i_r}}$ 线性无关，且任加一个其它向量 $\mathbf{a_{i_{r+1}}}$ 后 $\mathbf{a_{i_1}},\cdots,\mathbf{a_{i_r}},\mathbf{a_{i_{r+1}}}$ 线性相关，则称 $\mathbf{a_{i_1}},\cdots,\mathbf{a_{i_r}}$ 为 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 的极大无关组．或者说，如果 $\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle=\langle\mathbf{a_{i_1}},\cdots,\mathbf{a_{i_r}}\rangle$ 且 $\mathbf{a_{i_1}},\cdots,\mathbf{a_{i_r}}$ 线性无关，则称 $\mathbf{a_{i_1}},\cdots,\mathbf{a_{i_r}}$ 为 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 的极大无关组.

类似地，可以定义方程组的极大无关组。设方程组 $l_1=0,\cdots,l_m=0$ 的极大无关组为 $l_{i_1}=0,\cdots,l_{i_r}=0$. 则 $l_{i_1}=0,\cdots,l_{i_r}=0$ 是与 $l_1=0,\cdots,l_m=0$ 等价，且线性无关的方程组（不能再去掉任何一个方程）。

定义 4.7 (等价向量组) 设向量组 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 与向量组 $\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_l}$ 生成相同的子空间，即

$$\langle \mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle = \langle \mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_l}\rangle$$

则称 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 与 $\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_l}$ 等价.

显然， $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 与 $\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_l}$ 等价，当且仅当 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 可以用 $\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_l}$ 线性表示，且 $\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_l}$ 可以用 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 线性表示。

例 4.7 求 $\mathbf{a_1}=(2,-1,3,1)$, $\mathbf{a_2}=(4,-2,5,4)$, $\mathbf{a_3}=(2,-1,4,-1)$ 的极大无关组。

解：由于 $3\mathbf{a_1}=\mathbf{a_2}+\mathbf{a_3}$，且 $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ 中任两个线性无关，故其中任何两个为极大无关组.

如何求极大无关组？

定理 4.5 假设 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\in F^n$ 经一系列的初等变换变为 $\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_m}\in F^n$, 则 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b_1}\cdots\mathbf{b_m}$ 线性相关. 因此， $\lambda_1\mathbf{a_1}+\cdots+\lambda_m\mathbf{a_m}=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $\lambda_1\mathbf{b_1}+\cdots+\lambda_m\mathbf{b_m}=0$ 有非零解; $\mathbf{a_{i_1}},\cdots,\mathbf{a_{i_r}}$ 为 $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}$ 的极大无关组 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b_{i_1}},\cdots,\mathbf{b_{i_r}}$ 为 $\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_m}$ 的极大无关组.

根据上述定理，要求一组向量 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 的极大无关组，只需要对它做初等变换得到一组较简单的向量组，其极大无关组很容易求解。

例 4.8 $\mathbf{a_1}=\begin{pmatrix}-1\\5\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{a_2}=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\\9\end{pmatrix}$, $\mathbf{a_3}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\mathbf{a_4}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\\-5\end{pmatrix}$,

求它的极大无关组.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \mathbf{a_3} & \mathbf{a_4}\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1 & 4 & 2 & 0\\ 5 & 1 & 0 & 3\\ 3 & -2 & -1 & 4\\ -2 & 9 & 4 & -5\end{pmatrix}\end{array} \to \begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \mathbf{b_3} & \mathbf{b_4}\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1 & 4 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 5 & 4\end{pmatrix}\end{array}$$

易知， $\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_3}\}$, $\{\mathbf{a_1},\mathbf{a_2},\mathbf{a_4}\}$ 分别为极大无关组.

现设 $\mathbf{a_{i_1}},\cdots,\mathbf{a_{i_r}}$ 和 $\mathbf{a_{j_1}},\cdots,\mathbf{a_{j_s}}$ 分别为 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 的两个极大无关组，问是否有 $r=s$? 回答是肯定的。我们有下述定理。

定理 4.6 两个等价向量组 $\{\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_r}\}$ 和 $\{\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_s}\}$ 都分别线性无关，则 $r=s$.

定义 4.8 $\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m}$ 的极大无关组元素的个数 (唯一) 称为向量组的秩,记为 $\operatorname{rank}(\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m})$.

下列结论是显然的。

1. $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m})=m$.
2. $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_1}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{ramk}(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m})<m$.
3. $\{\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_s}\}$ 可以用 $\{\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_r}\}$ 线性表示 $\Rightarrow$ $r(\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_s})\le r(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_r})$
4. $\{\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_s}\}$ 与 $\{\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_r}\}$ 等价 $\Rightarrow$ $r(\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_s})=r(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_r})$
5. $\{\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_s}\}$ 可以用 $\{\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_r}\}$ 线性表示，且 $\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_s}$ 线性无关 $\Rightarrow$ $s\le r$.
6. 方程有解条件：$\mathbf{b}\in\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle$ $\Leftrightarrow$ $\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m}\rangle=\langle\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m},\mathbf{b}\rangle$ $\Leftrightarrow$ $r(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m})=r(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m},\mathbf{b})$.

向量组的秩与矩阵秩的关系：

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\mathbf{a_1}\\ \vdots\\ \mathbf{a_m}\end{pmatrix}=(\mathbf{b_1}\cdots\mathbf{b_n})$

则 $r(\mathbf{a_1}\cdots\mathbf{a_m})$(行秩) $=r(\mathbf{b_1}\cdots\mathbf{b_n})$(列秩) $=r(A)$.

定理 4.7 矩阵的行秩等于列失等于矩阵的秩.

该定理以来于以下事实.

1° 初等行变换不改变矩阵的列秩.
2° 初等行变换不改变矩阵的行秩.
3° 初等行变换不改变矩阵的秩.

推论 4.1 A 可逆 $\Leftrightarrow$ $\det(A)\ne 0$ $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$ $\Leftrightarrow$ A 的行向量线性无关.
$\Leftrightarrow$ A 的列向量是线性无关.

推论 4.2 $r(A)=r \Rightarrow A$ 的不等式零的 r 阶等式所在行构成 A 的行向量的极大无关组.

§4.4 子空间的基与维数

下面考察子空间的结构.

在 $\mathbb{R}^2$ 中，设 $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$ 不共线. 则 $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a}$ 可以唯一地表示成 $\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}$. 称 $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的一组基. (λ_1, λ_2) 称为 $\mathbf{a}$ 的坐标.

类似地，在 $\mathbb{R}^3$ 中设 $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ 不共面. 则 $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}$ 可以唯一地表示成 $\lambda_1\mathbf{a_1}+\lambda_2\mathbf{a_2}+\lambda_3\mathbf{a_3}$. 称 $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 称为 $\mathbf{a}$ 的坐标.

定义 4.9 $V \subset F^n$ 是子空间. V 中一组向量 $\{\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_r}\}$ 称为 V 的一组基，如果它能满足： (1) $\forall \alpha \in V$, α 可唯一表示成 $\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_r}$ 的线性组合. (2) $\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_r}$ 线性无关.

基即 V 的极大无关组！

定理 4.8 F^n 中任一非零子空间都有一组基.

由于任两组基等价，从而个数相等，称基元素的个数为 **维数**.

定义 4.10 $V \subset F^n$ 为子空间. 定义 $\dim V = \operatorname{rank}(V)$.

定理 4.9 $V \subset F^n$ 为 r 维子空间. 则 V 中任意 $r+1$ 个向量线性相关.

定理 4.10 V 为 r 维子空间，则 V 中任意 r 个线性无关向量为一组基.

定理 4.11 U 与 V 为 F^n 的子空间， $U \subseteq V$, 则 $\dim U \le \dim V$.

定理 4.12 U 与 V 为 F^n 的子空间且 $U \subseteq V$, 若 $\dim U = \dim V$, 则 $U = V$.

例 4.9 在 $\mathbb{R}^3$ 中， $V=\{(x_1, x_2, x_3) |\ x_1+x_2+x_3=0\}$, 求 V 的基与维数.

例 4.10 $V \subset F^n$. 证明： V 中任一线性无关组可扩充为 V 的基.

课堂练习:

1. $A \in F^{m\times n}$. 设 A 的某个 r 个子式非空. 证明：该子式所在的行向量及所在列向

量均线性无关.

2. 证明： $r(\mathbf{a_1}+\mathbf{b_1}\cdots\mathbf{a_n}+\mathbf{b_m})\le r(\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_m})+r(\mathbf{b_1},\cdots,\mathbf{b_m})$.

3. 求向量组 $\mathbf{a_1}=(-1,2,2,3)$, $\mathbf{a_2}=(1,3,8,7)$, $\mathbf{a_3}=(2,-1,2,4)$, $\mathbf{a_4}=(3,0,6,3)$ 的秩及极大无关向量组.

4. 非零向量组 $\mathbf{a_1},\cdots,\mathbf{a_s}(s\ge 2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 每个 $\mathbf{a_i}$ 可以用前面向量的线性组合表示.

§4.5 线性方程解集空间的结构

§4.5.1 齐次线性方程解集间的结构

设 $A\in F^{m\times n}$, 记 $V=\{\mathbf{x}\in F^n|\ A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.

1. V 是 F^n 的子空间 — 解空间.

2. V 的基 $\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_s}$ 称为线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系. 任一解 $\mathbf{x}$ 可以表示为 $\mathbf{x}=\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i\mathbf{a_i}$— 通解.

3. $\dim V=n-r(A)$.

§4.5.2 非齐次线性方程组解集的几何结构

设 $A\in F^{m\times n}$ 及 $\mathbf{b}\in F^m$(非零), 记 $W=\{\mathbf{x}\in F^n|\ A\mathbf{x}=\mathbf{b}\}$, $V=\{\mathbf{x}\in F^n|\ A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$
W 不是子空间！它具有性质：

1. $\alpha,\beta\in W\ \Rightarrow\ \alpha-\beta\in V$.

2. $\alpha\in W,\ \gamma\in V\ \Rightarrow\ \alpha+\gamma\in W$.

定理 4.13 $W=\{\gamma_0+\eta|\ \eta\in V\}=\gamma_{\mathbf{0}}+\mathbf{V}$. γ_0 是 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一个特解.

§4.6 一般线性空间

将数组空间推广到其它空间。

1° 方程组成的空间.

2° 多项式空间 $\mathbb{P}_n$.

3° 三角多项式空间 C_n.

4° 矩阵全体 $F^{m\times n}$.

定义 4.11 (线性空间空义) 集合 $V \neq \phi$, 数域 F. 两种运算： 1° 加法 $V\times V \to V$; 2° 数乘 $F\times V \to V$. 还要 8 条运算公理！则称 V 为 F 上的线性空间.

重点说明：①两种运算的定义；　②为何要 8 条公理.

从如下命题说明为何要 8 条公理： $\lambda_1\mathbf{a_1} + \cdots + \lambda_n\mathbf{a_n} = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a_i} = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_i}\mathbf{a_1} - \cdots - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_i}\mathbf{a_n}$.

性质:

(1) 零向量唯一. $0_1 + 0_2 = 0_1 = 0_2 + 0_1 = 0_2$.

(2) 负向量唯一.

(3) $0a = \theta:$ $(-1)a = -a;$ $\lambda 0 = 0$.

(4) $\lambda a = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ 或 $a = 0$.

例 4.11 线性空间实例.

(1) $V = F^n$. F. 通常向量的加法与数乘.

(2) $V = \{a_1x_1 + \cdots + \mathbf{a_n x_n} |\ \mathbf{a_i} \in \mathbf{F}\}$..

(3) $V = \mathbb{P}_n$..

(4) $V = F^{m\times n}$.

(5) $V = \mathbb{C},\ F = \mathbb{R}$.

(6) $V = R^+,\ F = R.$ $\alpha\oplus\beta = \alpha\beta,\ \lambda\circ\alpha = \alpha^\lambda$.

(7) $V = C[a,b]$. $F = R$.

数组空间的相关理论：线性相关与无关，极大无关组与秩，子空间的基与维数等都可以推广到一般线性空间。

注意不同类： $\mathbb{R}^3$ 中有几何：长度、夹角等. F^n 也可以定义. 但一般线性空间中没有向量长度、方向等概念.

§4.7 线性空间的同构

记 $V = \{n$ 元一次齐次方程全体 $\}$. 对方程按通常的加法与数乘 V 构成一个线性空间. 对每个

$l = a_1x_1 + \cdots + \mathbf{a_n x_n} = \mathbf{0} \in \mathbf{V}$, 有唯一 $(a_1, \cdots, a_n) \in F^n$ 与之对应，由此建立 V 与 F^n 的一个一一对应，并且 $l_1, \cdots, l_m$ 线性相关 $\leftrightarrow$ $\mathbf{b_1}, \cdots, \mathbf{b_m}$ 线性相关，其中 $\mathbf{b_i}$ 与 l_i 对应。称 V 与 F^n 同构 (**即 V 与 F^n 的结构从线性运算角度来说是相同的** !).

设 V 为 n 维线性空间， $\mathbf{a_1}, \cdots, \mathbf{a_n}$ 为 V 的基。对任何 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a_1} + \cdots + x_n\mathbf{a_n}$, 有唯一（坐标） $X := (x_1, \cdots, x_n) \in F^n$ 与之对应。并且该对应保持线性关系不变：$\sigma:\ V \to F^n,\ \sigma(x) = X.\ \ \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y),\ \sigma(\lambda x) = \lambda\sigma(x).$

定义 4.12 V_1, V_2 是数域 F 上两个线性空间．如果存在映射 $\sigma : V_1 \to V_2$ 满足：

(1) $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y),\quad x, y \in V_1;$

(2) $\sigma(\lambda x) = \lambda\sigma(x),\ \lambda \in F,\ x \in V_1.$

则称线性空间 V_1 与 V_2 同构 (isomorphic), 记为 $V_1 \sim V_2$. σ 称为同构映射 (isomorphism). 当 $V_1 = V_2$ 时，称 σ 为自同构 (automorphic).

显然， $\dim V = n\ \Rightarrow\ V \sim F^n$.

定理 4.14 $\sigma:\ V_1 \to V_2$ 是同构映射．则

(1) $\sigma(0_1) = 0_2$.

(2) $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$.

(3) $\sigma(\sum \lambda_i \mathbf{a_i}) = \sum \lambda_\mathbf{i}\sigma(\mathbf{a_2})$.

(4) S 线性无关 (相关) $\Leftrightarrow$ $\sigma(s)$ 线性无关 (相关).

(5) B 是 V_1 的基 $\Leftrightarrow$ $\sigma(B)$ 是 V_2 的基.

(6) U 是 V_1 的子空间 $\Leftrightarrow$ $\sigma(U)$ 是 V_2 的子空间.

(7) $\dim V_1 = \dim V_2$.

定理 4.15 数域 F 上线性空间 V_1 与 V_2 同构 $\Leftrightarrow$ $\dim V_1 = \dim V_2$.

例 4.12 V 是数域 F 上线性空间，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in V$ 线性无关. 令 $\beta_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j,\ i = 1, 2, \cdots, m,\ a_{ij} \in F$. 证明：

$$\dim\langle \beta_1, \cdots, \beta_m \rangle = \operatorname{rank}(A).$$

证 直接按定义不易．要求 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 的极大无关组.

先假设 $V = F^n$. 由已知条件,

$$(\beta_1, \cdots, \beta_m) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)A,\quad A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

由于此时 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的基，$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为可逆方阵. 从而 $\dim\langle\beta_1,\cdots,\beta_m\rangle = \mathrm{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_m) = \mathrm{rank}(A)$.

对于一般空间 V, 考虑同构映射: $\sigma: W := \langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle \leftrightarrow F^n$, $\sigma(\alpha_i) = \mathbf{e}_i$. 设 $A = (A_1,\cdots,A_m)$. 则 $\sigma(\beta_i) = A_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. 于是

$$\dim\langle\beta_1,\cdots,\beta_m\rangle = \dim\langle\sigma(\beta_1),\cdots,\sigma(\beta_m)\rangle = \dim\langle A_1,\cdots,A_m\rangle = \mathrm{rank}(A).$$

课堂练习:

1. $V = R$. $F = Q$. ①证明: V 按通常加法、数乘构成线性空间. ② $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$ 线性无关.
2. $V = \{1,\cos x,\cos^2 x,\cos^3 x\}$. ①证明 $1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x$ 为 V 的基. ②求 $-3+2\cos^2 x+\cos^3 x$ 在该基下的坐标.
3. 证明: R 与 R^+ 同构. 其中 R^+ 中加法与数乘定义如下: $\alpha\oplus\beta = \alpha\beta$, $\lambda\alpha = \alpha^\lambda$.
4. 证明: $(1-x)^3, 3(1-x)x^2, 3(1-x)^2, (1-x)^3$ 为 $\mathbb{P}_3$ 的基, 并求 $1+2x+3x^2-x^3$ 在该基下的坐标.

§4.8 子空间的运算

1. 求交

设 W_1,W_2 是 V 的子空间. 求 $W_1\cap W_2$.

(1) $W_1\cap W_2$ 仍为子空间.

(2) 求 $W_1\cap W_2$ 的基.

(3) 求 $W_1\cap W_2$ 的维数.

2. 求和

设 W_1,W_2 是 V 的子空间，定义 W_1 与 W_2 的和 $W_1+W_2 = \{\alpha_1+\alpha_2|\,\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2\}$.

(1) W_1+W_2 为子空间.

(2) 求 W_1+W_2 的基.

(3) 求 W_1+W_2 的维数.

定理 4.16(维数公式) 设 W_1,W_2 是 V 的子空间. 则 $dim(W_1+W_2) = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1\cap W_2)$.

设 W_1,W_2 是 V 的子空间，如果 $W_1\cap W_2 = 0$, 则称 W_1+W_2 为直和.

定理 4.17 设 W_1, W_2 是 V 的子空间，则 W_1+W_2 为直和 $\Leftrightarrow \forall\alpha \in W_1+W_2$, α 可唯一地表示为 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 其中 $\alpha_1 \in W_1$ and $\alpha_2 \in W_2 \Leftrightarrow dim(W_1+W_2)=dimW_1+dimW_2$ $\Leftrightarrow W_1$ 与 W_2 的基合起来构成 W_1+W_2 的一组基。