

## 第六章 傅里叶变换光学

处理光的衍射和干涉问题，最基本的方法是从光的波动性出发，应用波的叠加原理或是菲涅耳—基尔霍夫衍射积分公式。即都是研究光的相干叠加。这是传统光学的一般方法。

但是，我们可以从另外一个角度分析这类问题。电磁学中场的概念给予我们有益的启示。入射的电磁波，即入射波场，遇到障碍物之后，发生衍射。衍射波场中，各种物理量重新分布，与简单的入射波场有极大的差别。这种差别，是由于障碍物造成的，或者说，衍射障碍物将简单的入射场变换成了复杂的衍射场。所以可以从障碍物对波场的变换作用，来分析衍射。

衍射障碍物就是衍射屏，具有一定的空间结构、或者光学结构，这种空间的光学结构，可以用某种形式的函数来表示，这样一来，衍射障碍物对入射波场的变换作用，就可以表示为入射波的复振幅与该函数的乘积。

从更广义的角度，不仅仅是相干波场的障碍物，非相干系统中的一切使波场或者波面产生改变的因素，例如成像系统中的透镜、反射镜，它们的作用都可以应用变换的方法处理。

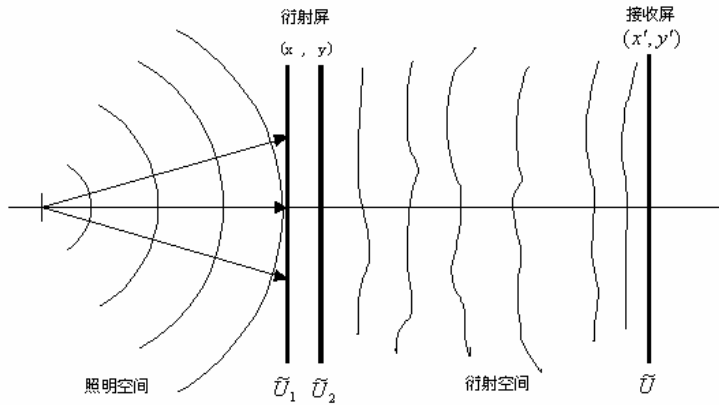
二次大战中，由于对雷达波的研究，促进了光学理论的发展，使得变换光学得以建立。

### § 6.1 衍射系统的屏函数

#### 一、衍射屏函数

衍射发生的条件，要求有障碍物在波场中。波在自由空间中传播是不会出现衍射的。衍射障碍物的存在，使得波面改变，或者说波的复振幅重新分布。以前的衍射屏的作用就是这样。所以，把能使波前的复振幅发生改变的物，统称为衍射屏。单缝、圆孔、光栅等等，是我们熟悉的衍射屏，透镜、棱镜等，也是衍射屏。

衍射屏将波的空间分为前场和后场两部分。前场为照明空间，后场为衍射空间。



波在衍射屏的前后表面处的复振幅分别为  $\tilde{U}_1(x, y)$  和  $\tilde{U}_2(x, y)$ ，接收屏上的复振幅为  $\tilde{U}(x', y')$ ，分别称之为入射场、透射场（或反射场）和接收场。衍射屏的作用使得  $\tilde{U}_1(x, y)$  转换为  $\tilde{U}_2(x, y)$ 。用函数表示， $\tilde{t}(x, y) = \frac{\tilde{U}_2(x, y)}{\tilde{U}_1(x, y)}$ ， $\tilde{t}(x, y)$  为透过率或反射率函数，统称屏函数。

屏函数为复数， $\tilde{t}(x, y) = t(x, y)\exp[i\varphi_t(x, y)]$ 。模  $t(x, y)$  为常数的衍射屏称为位相型的，幅角  $\varphi_t(x, y)$  为常数的衍射屏称为振幅型的。

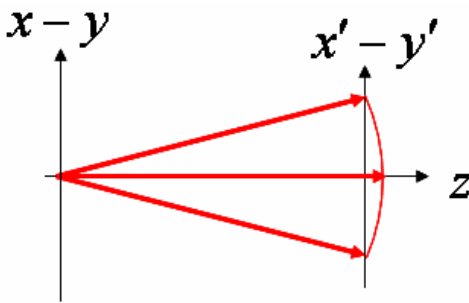
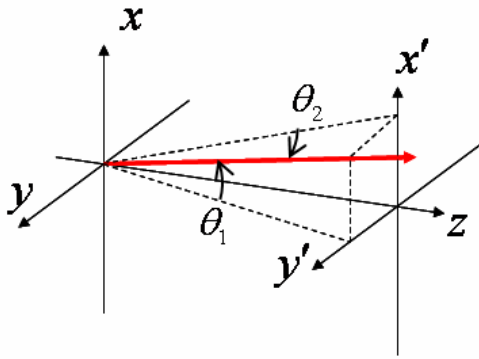
## 二．相因子判断法

知道了衍射屏的屏函数，就可以确定已知入射场经过衍射屏之后的衍射场的复振幅变换情况，进而完全确定接收场。但由于衍射屏的复杂性以及衍射积分求解的困难，完全确定屏函数通常较困难，或者说几乎是不可能的。所以只能采取一定的近似方法获取衍射场的主要特征。如果能够确定屏函数的位相，则可以通过研究波的位相改变来确定波场的变化。这种方法称为相因子判断法。

傍轴近似下，各种类型的波的相因子罗列如下。

- 1、波矢沿  $(\theta_1, \theta_2)$ （与平面夹角）方向的平面波

$$\exp[ik(\sin \theta_1 x + \sin \theta_2 y)]$$

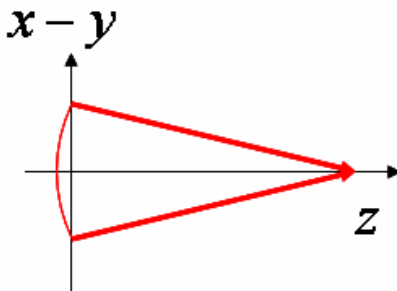


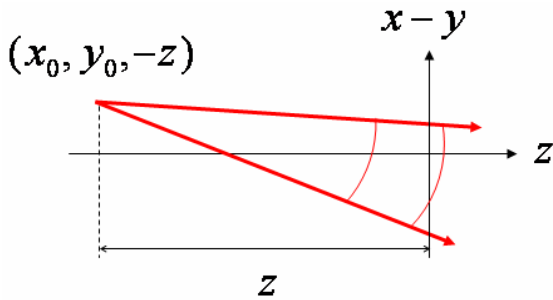
2、轴上发散的球面波

$$\exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$$

3、轴上汇聚的球面波

$$\exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right]$$



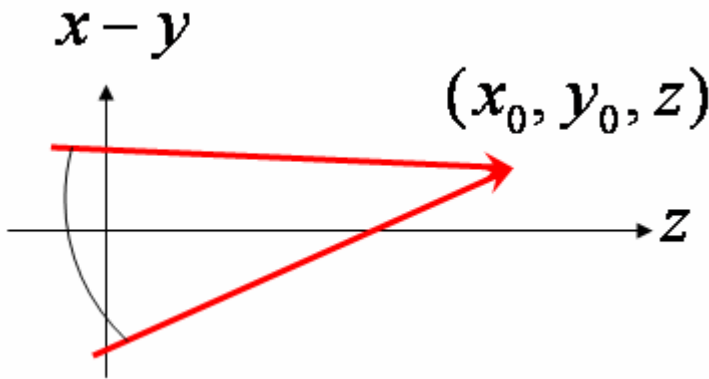


## 4、轴外发散球面波

$$\exp\left[ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$$

## 5、轴外汇聚球面波

$$\exp\left[-ik\left(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}\right)\right]$$



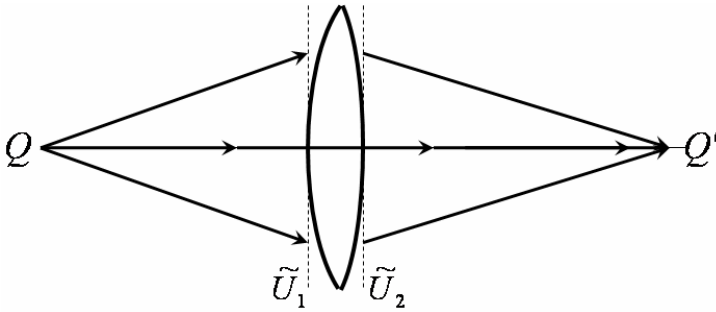
## 三．波前的相因子

典型的平面波和球面波在波前上的相因子已在前面求得。

## 1． 透镜的位相变换函数（透过率函数）

薄透镜，中心厚度为 $d_0$ ，透镜的有效口径为 $D$ 。即光束被限制在直径为 $D$ 的范

围内。



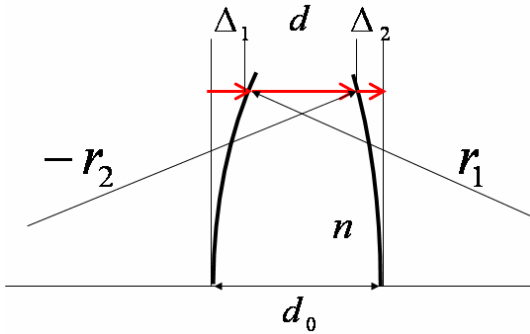
在透镜前后各取一个平面，入射波和透射波的复振幅分别为

$\tilde{U}_1(x, y) = A_1 \exp[i\varphi_1(x, y)]$ ， $\tilde{U}_2(x, y) = A_2 \exp[i\varphi_2(x, y)]$ 。透镜的透过率函数为

$$\tilde{t}_L = \frac{A_2}{A_1} \exp[i(\varphi_2 - \varphi_1)] = \begin{cases} a(x, y)e^{i\varphi_L(x, y)}, & r < \frac{D}{2} \\ 0, & r > \frac{D}{2} \end{cases}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

忽略透镜的吸收，即  $a(x, y) = A_2 / A_1 = 1$ ，有

$\tilde{t}_L(x, y) = \exp[i\varphi_L(x, y)] = \exp[i(\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y))]$ ，为透镜的位相变换函数。



对于薄透镜，采取傍轴近似，认为镜中的光线平行于光轴。从图上可以求得经透镜后的位相差为

$$\begin{aligned} \varphi_L(x, y) &= \frac{2\pi}{\lambda} [\Delta_1 + \Delta_2 + nd(x, y)] \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} [\Delta_1 + \Delta_2 + n(d_0 - \Delta_1 - \Delta_2)] = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)(\Delta_1 + \Delta_2) \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} nd_0$$

近 轴 条 件 下 ，

$$\Delta_1(x, y) = r_1 - \sqrt{r_1^2 - (x^2 + y^2)} = r_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_1^2}}\right) \approx \frac{x^2 + y^2}{2r_1}$$

$$\Delta_2(x, y) = -r_2 - \sqrt{r_2^2 - (x^2 + y^2)} \approx -\frac{x^2 + y^2}{2r_2}$$

$$\varphi_L(x, y) = -\frac{2\pi n-1}{\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)(x^2 + y^2) = -k \frac{x^2 + y^2}{2F} \quad , \quad \text{其 中}$$

$$F = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}。$$

可得透镜的位相变换函数为

$$\tilde{t}_L(x, y) = \exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2F}\right] \quad , \quad \text{其相因子为 } -ik \frac{x^2 + y^2}{2F}$$

可以用上述函数得到几何光学的物像公式。

例如，平行光正入射，入射波在透镜平面处的复振幅为  $\tilde{U}_1 = A_1$ ，透射波为

$$\tilde{U}_2(x, y) = \tilde{U}_1(x, y) \tilde{t}_L(x, y) = A_1 \exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2F}\right] \text{ 为汇聚到透镜后 } F \text{ 处的}$$

球面波。透镜焦距为  $F$ 。

$$\text{如果入射波是透镜前 } s \text{ 处的球面波，则 } \tilde{U}_1(x, y) = A_1 \exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2s}\right]$$

衍 射 波

$$\tilde{U}_2(x, y) = A_1 \exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2s}\right] \exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2F}\right] = A_1 \exp\left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{s}\right)\right]$$

为汇聚到  $\frac{1}{\frac{1}{F} - \frac{1}{s}}$  处的球面波。  $s' = 1/(\frac{1}{F} - \frac{1}{s}) = \frac{sF}{s - F}$ 。

即物像公式为  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{F}$ 。

## 2. 棱镜的位相变换函数（透过率函数）

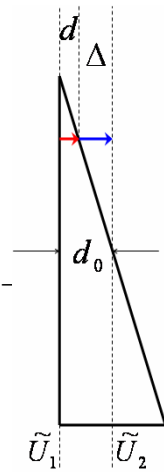
在棱镜前后各取一相互平行的平面，入射波和透射波在两平面上的复振幅各为  $\tilde{U}_1(x, y) = A_1 \exp[i\varphi_1(x, y)]$ ，

$$\tilde{U}_2(x, y) = A_2 \exp[i\varphi_2(x, y)]$$

薄的楔形棱镜，可以得到

$$\varphi_p(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta + nd) = \frac{2\pi}{\lambda}(\Delta + nd_0 - n\Delta) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(n - 1)\Delta$$

。  $\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}nd_0$ ，为常数，相当于从棱镜中部（即光轴处）通过的光的位相滞后。如果棱镜前后两面的交棱，即楔角处的棱与  $y$  轴平行，楔角为  $\alpha$ ，则  $\Delta = x\alpha$ 。  $d_0$  为棱镜中心处的厚度。



$$\varphi_p(x, y) = -k(n - 1)\alpha x$$

如果棱镜的前表面保持在  $xy$  平面内，而前后两面的交棱在  $xy$  平面内沿任意方向，即相当于棱镜绕光轴转过一个角度。可以用斜面法线的方向余弦角  $\alpha_1, \alpha_2$  表征，则有

$$\tilde{t}_p(x, y) = \exp[-ik(n - 1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)]$$

例如，轴上一物点到棱镜的距离为  $s$ ，则其发出的球面波经过棱镜后出射的波前可以按以下方法求得

$$\tilde{U}_2(x, y) = \tilde{U}_1(x, y)\tilde{t}_p(x, y) = A_1 \exp[ik \frac{x^2 + y^2}{2s}] \exp[-ik(n - 1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y)]$$

$$= A_1 \exp ik \left[ \frac{x^2 + y^2}{2s} - (n-1)(\alpha_1 x + \alpha_2 y) \right]$$

等效于轴外物点发出的球面波，点源的位置为  $x_0 = (n-1)\alpha_1 s$ ，

$$y_0 = (n-1)\alpha_2 s, \quad z_0 = s$$

透镜和棱镜仅仅是位相型的衍射屏，只对波的位相起变换作用，是一种简单的变换装置。

## § 6.2 夫琅和费光栅衍射的傅里叶频谱分析

### 一. 屏函数的傅里叶变换

#### 1. 空间频率的概念

单缝、距孔、圆孔或者光栅，都是衍射屏，其作用是使入射波的波前改变，可以用屏函数表示衍射屏的作用。有一类应用广泛的衍射屏是衍射光栅，即具有周期性空间结构的衍射屏。

衍射屏具有空间的周期性，而波也具有空间的周期性，即衍射屏函数和复振幅都是空间的周期性函数，那么一定可以从数学上得到新的处理方法。

衍射光栅具有空间的周期性，无论是黑白型的光栅还是正弦型的光栅，其周期都可以用光栅常数  $d$  表示。

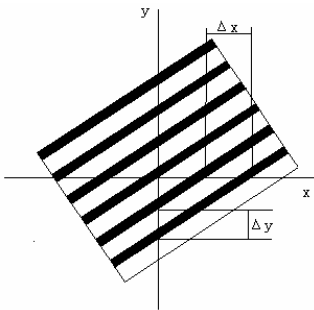
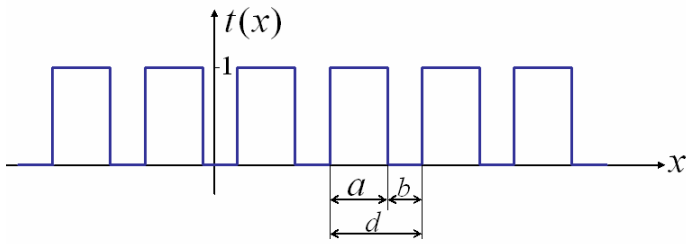
周期的倒数是频率，例如对于振动，其振动周期  $T$  的倒数是振动的频率，这是时间上的周期和频率。同样，在空间上也可以定义周期和频率，空间周期的倒数就是空间频率，即有  $f = \frac{1}{d}$ 。  $f$  称为空间频率。

周期性的衍射屏，既可以用空间周期描述，也可以用空间频率描述。

前面说过的反射、透射或闪耀光栅，可以认为是“黑白型”的。即一部分使光全部透射或反射、另一部分全部不透光。是典型的振幅型衍射屏，其屏函数表示为

$$\tilde{t}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{透光部分} \\ 0 & \text{遮光部分} \end{cases}, \text{严格的周期函数, 应该是定义域为整个 } xy \text{ 平面。}$$





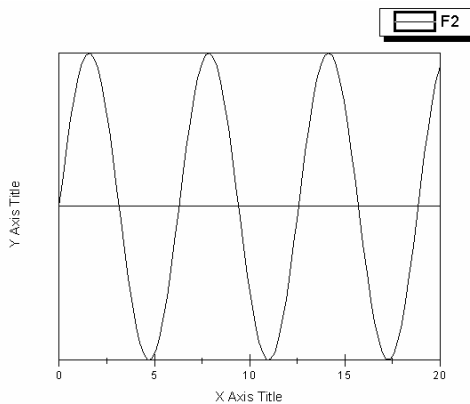
X 方向的透过率表示为

$$\tilde{t}(x) = \begin{cases} 1 & x_0 + nd < x < x_0 + nd + a \\ 0 & x_0 + nd + a < x < x_0 + (n+1)d \end{cases}, x \in (-\infty, +\infty)$$

其周期性表示为  $\tilde{t}(x) = \tilde{t}(x + nd)$ ， $d$  为最小的空间周期，即空间周期。空

间频率为  $f = \frac{1}{d}$ 。

如果透过率的变化是三角函数形式，即余弦或正弦型的，称为正弦光栅。



## 2. 正弦光栅的傅立叶变换

正弦光栅，如果光栅刻线与 y 轴平行，则其透过率在 X 方向作周期性变化，周期为 d，空间频率为 f， $f=1/d$ 。其屏函数可以写成

$$\tilde{t}(x) = t_0 + t_1 \cos(2\pi fx + \varphi_0)。$$

平行光正入射，由于  $\tilde{U}_1(x) = A_1$ ，则透射波的复振幅为

$$\tilde{U}_2(x) = \tilde{U}_1(x)\tilde{t}(x) = A_1 [t_0 + t_1 \cos(2\pi fx + \varphi_0)]。而$$

$$\cos(2\pi fx + \varphi_0) = \frac{1}{2} \{ \exp[i(2\pi fx + \varphi_0)] + \exp[-i(2\pi fx + \varphi_0)] \}，所以$$

$$\tilde{U}_2(x) = A_1 t_0 + \frac{1}{2} A_1 t_1 \exp$$

$$\exp[i(2\pi fx + \varphi_0)] + \frac{1}{2} A_1 t_1 \exp[-i(2\pi fx + \varphi_0)]，即$$

$$\tilde{U}_2(x) = \tilde{U}_0(x) + \tilde{U}_{+1}(x) + \tilde{U}_{-1}(x)，透射波实际上变为三列平面波$$

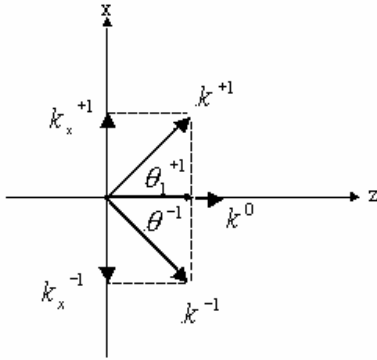
关于波的方向

$$\tilde{U}_{+1}(x) = \frac{1}{2} A_1 t_1 \exp[i(2\pi fx + \varphi_0)]，为平面波，其波矢在 x 方向的分量为$$

$$k_x^{+1} = 2\pi f，方向角为 \sin \theta_1^{+1} = \frac{k_x^{+1}}{k^{+1}} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f\lambda，其余两列波的方向角分$$

别为  $\sin \theta_1^0 = 0$ ， $\sin \theta_1^{-1} = -f\lambda$ 。f 为空间频率。

一列波，其空间频率越大，在 X 方向的波矢分量越大，即对于光轴的角度越大。所以，对于有限大小的通光孔径，总是空间频率小的波可以通过，空间频率大的波不能通过。这就是空间滤波的原理。



$\tilde{U}_0(x) = A_1 t_0$  , 0 级波 , 直流成分 , 方向  $\sin \theta_0 = 0$

$\tilde{U}_{+1}(x) = \frac{1}{2} A_1 t_1 \exp[i(2\pi f x + \varphi_0)]$  , +1 级波 , 方向  $\sin \theta_{+1} = f\lambda$

$\tilde{U}_{-1}(x) = \frac{1}{2} A_1 t_1 \exp[-i(2\pi f x + \varphi_0)]$  , -1 级波 , 方向  $\sin \theta_{-1} = -f\lambda$

上述结果与前面用衍射积分公式得到的结果是不一样的, 积分公式的结果是

$$\tilde{U}(x) = KFU_0 d \frac{e^{ikr_0}}{f} \left[ \frac{\sin \beta}{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\sin(\beta - \pi)}{\beta - \pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin(\beta + \pi)}{\beta + \pi} \right]$$

不同的原因是由于光栅的宽度是有限的, 所以上述的屏函数或透过率实际上不是严格的周期性函数, 因而每一列波都有相应的半角宽度。

$$\Delta \theta_0 = \frac{\lambda}{D} , \Delta \theta_{\pm 1} = \frac{\lambda}{D \cos \theta_{\pm 1}} , D \text{ 是光栅的有效宽度。}$$

### 3 . 周期性屏函数的傅里叶变换

对于一般的周期性的屏函数, 可以用傅里叶级数将其展开为一系列正弦和余弦函数的和。

如果周期函数为  $t(x)$  , 其周期为  $d$  ,  $x \in (-\infty, +\infty)$  , 则  $t(x)$  可以用 Fourier 级数表示, 即,

$$t(x) = t_0 + \sum_{n>0} a_n \cos 2\pi f_n x + \sum_{n>0} b_n \sin 2\pi f_n x , \text{ 其中 } f_n = n f_1 = n \frac{1}{d} ,$$

$f_1 = \frac{1}{d}$  是基频。

而相应的 Fourier 系数为

$$t_0 = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} t(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{d} \int_{-d/2}^{d/2} t(x) \cos(2\pi f_n x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{d} \int_{-d/2}^{d/2} t(x) \sin(2\pi f_n x) dx$$

或者，

$$t(x) = t_0 + \sum_{n>0} c_n \cos(2\pi f_n x - \varphi_n), \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n}.$$

或者，

$$t(x) = t_0 + \sum_{n \neq 0} t_n \exp[i(2\pi f_n x - \varphi_n)] = t_0 + \sum_{n \neq 0} \tilde{t}_n \exp[i(2\pi f_n x)]$$

$$\tilde{t}_n = t_n e^{-i\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$\text{傅里叶系数 } \tilde{t}_n \text{ 可以直接求出, } \tilde{t}_n = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} t(x) \exp(-2i\pi f_n x) dx$$

波动光学中，用复数表示有简单明确的优点，所以上述的复数表达式具有代表性。

## 屏函数的傅里叶频谱

$\tilde{t}_n$  是将周期性函数展开为 Fourier 级数后相应的系数，实际上表示每一个成分所占的比重。如果从波的角度看，将  $\tilde{t}_n \exp i(2\pi f_n x)$  视为波的复振幅，则  $\tilde{t}_n$  表示的就是  $e^{2i\pi f_n x}$  的振幅。

$\tilde{t}_n$  的集合称为傅里叶频谱，即空间频率为  $f_n$  的成分的振幅。对于周期性的屏函数， $\tilde{t}_n$  的取值是分立的，而非周期性的屏函数，由于必须以 Fourier 积分的形式表示，则  $\tilde{t}_n$  的取值为连续的。

从 Fourier 变换的角度来看，任何形式的衍射屏或物体，即任何形式的屏函数，都可以将其看成是一系列具有空间周期性的函数的线性叠加，即的空间频谱的线性叠加。每一个周期函数的相因子可以表示为  $\varphi_n = 2\pi f_n x$ ，单色平面波照射到这些物体上，由于平面波的位相因子也是线性的，即  $\varphi(x, y) = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0$ ，所以透射波也是一系列具有空间周期性函数的线性叠加，其每一成分的周期与  $f_n$  和屏函数的周期有关，该成分的相因子为  $\varphi_n' = \varphi(x, y) + \varphi_n = k_x x + k_y y + k_z z + 2\pi f_n x + \varphi_0$ ，则分解成为一系列向不同方向出射的单色平面波，或者是分立的，或者是连续的。

## 傅氏面

每一个空间频谱代表一个衍射波，该衍射波是平面波。用透镜将可以将不同方向的平面衍射波汇聚到其像方焦平面的不同位置，则得到一系列的衍射斑，则焦平面就是入射波经过衍射屏之后形成的空间频谱面，即衍射屏、或原图像的傅里叶频谱面，称为傅氏面。夫琅和费衍射装置就是傅里叶频谱分析器。

## 4. 黑白型光栅的屏函数

一维情形，即光栅的刻线方向与坐标轴平行，设与  $y$  轴平行，屏函数是在  $x$  方向的周期性函数，其周期性屏函数可以表示为  $\tilde{t}(x) = \tilde{t}(x + nd)$ ，设  $x \in (-\infty, +\infty)$ ， $n$  为整数。可以直接用傅里叶级数表示为

$\tilde{t}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i2\pi f_n x}$ ，则其中的 Fourier 频谱为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} t(x) e^{-i2\pi f_n x} dx = \frac{1}{d} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i2\pi f_n x} dx \\ &= -\frac{1}{d i 2\pi f} (e^{-i\pi f a} - e^{i\pi f a}) = \frac{\sin(\pi f a)}{d \pi f} = \frac{a \sin(\pi f a)}{d \pi f a} = \frac{a \sin(\pi a / d)}{d \pi a / d} \end{aligned}$$

其方向为  $\sin \theta_n = n f \lambda = \frac{n}{d} \lambda$ ，即  $d \sin \theta_n = n \lambda$ ，即为光栅方程。

$$n \text{ 级谱的强度为 } I_n = |a_n|^2 = \left[ \frac{a \sin(\pi m a / d)}{d \pi m a / d} \right]^2 = \left( \frac{a}{d} \right)^2 \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\pi} \sin \theta_n\right)^2}{\left(\frac{\pi a}{\pi} \sin \theta_n\right)^2}, \text{ 为单}$$

元衍射因子对应的强度分布。

例如对于  $a=d/2$  的光栅，其屏函数的傅里叶展开式为

$$t(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(2\pi f x) - \frac{2}{3\pi} \cos(2\pi * 3 f x) + \frac{2}{5\pi} \cos(2\pi * 5 f x) - \dots$$

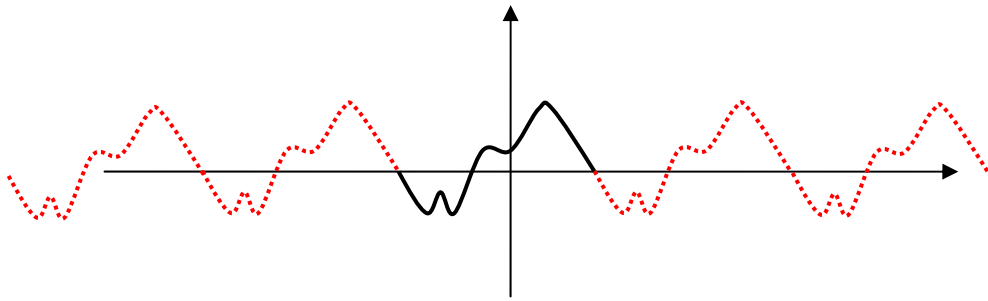
或用指数表示为

$$\tilde{t}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} [e^{i2\pi f x} - e^{-i2\pi f x}] - \frac{1}{3\pi} [e^{i2\pi * 3 f x} - e^{-i2\pi * 3 f x}] + \frac{1}{5\pi} [e^{i2\pi * 5 f x} - e^{-i2\pi * 5 f x}] - \dots$$

其二、四、六等衍射级次缺级。

## 5. 非周期性的屏函数的傅里叶变换

非周期性的函数，相当于  $f = \frac{1}{d} = 0, (d = \infty)$  的周期性函数。



如对于周期函数  $g(x)$ ，其空间周期为  $L$ ，取其在在一个周期，即  $(-L/2, L/2)$  间的一段，展开为

$$g(x) = g_0 + \sum_{n \neq 0} \tilde{g}_n e^{i2\pi n f x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}_n e^{i2\pi n f x}, \quad f = \frac{1}{L}, \text{ 为基频。傅里叶系数为}$$

$$\tilde{g}_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} g(x) e^{-i2\pi n f x} dx.$$

$f_n = nf$ ，相应地有

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L\tilde{g}_n e^{i2\pi nfx} \frac{1}{L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L\tilde{g}_n e^{i2\pi nfx} (f_{n+1} - f_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L\tilde{g}_n e^{i2\pi f_n x} \Delta f_n$$

如  $L = \frac{1}{f}$ ，上述求和化为积分，有

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L\tilde{g}_n e^{i2\pi f_n x} \Delta f_n = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f x} df_n = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi f x} df$$

反变换，即 Fourier 系数为

$$G(f) = L\tilde{g}_n = \int_{-L/2}^{L/2} g(x) e^{-i2\pi fx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi fx} dx$$

即有对于非周期性函数的傅里叶积分变换，或傅里叶变换。

$$\begin{cases} g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi fx} df \\ G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi fx} dx \end{cases}$$

可见，非周期函数的频谱  $G(f)$  为连续谱。

例如，对于单缝衍射屏，其屏函数为  $g(x) = \begin{cases} A & |x| < a/2 \\ 0 & |x| > a/2 \end{cases}$ ，作傅里叶

变换，有

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-a/2}^{a/2} A \exp(-i2\pi fx) dx \\ &= \frac{A}{-i2\pi f} \int_{-a/2}^{a/2} A \exp(-i2\pi fx) d(-i2\pi fx) = \frac{A}{-i2\pi f} [e^{-i\pi fa} - e^{i\pi fa}] \\ &= A \frac{-i2 \sin(\pi fa)}{-i2\pi f} = aA \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \alpha = \pi fa \end{aligned}$$

如果平面波正入射  $\tilde{U}_1(x) = A_1$ ，屏函数中  $A=1$ ，透射波为

$$\tilde{U}_2(x) = \tilde{U}_1(x)g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} aA_1 \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{i2\pi fx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} aA_1 \frac{\sin \pi fa}{\pi fa} e^{i2\pi fx} dx$$

透射波中空间频率为  $f$  的部分，即方向为  $\sin \theta = \frac{2\pi f}{k} = f\lambda$  的成分，透射波

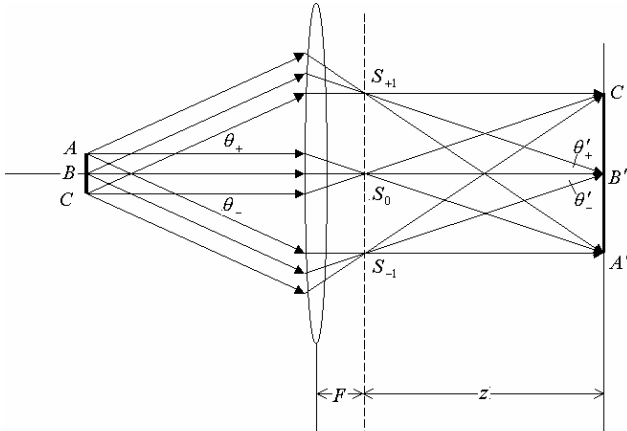
为  $G(f) = aA_1 \frac{\sin \pi f a}{\pi f a}$ ，将其中的空间频率  $f$  以方向表示， $f = \frac{\sin \theta}{\lambda}$ ，则有

$$G(f) = aA_1 \frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta}，即为单元衍射因子。$$

## § 6.3 阿贝成像原理

### 一、阿贝成像原理的数学推导

用单色平行光照明近轴小物ABC，成像于A'B'C'，对于成像过程，可以用几何光学的物像关系理解，也可以从频谱转换的角度解释。



物可以看作是一系列不同空间频谱的集合。图示的相干成像分两步完成。第一步是物上的光发生夫琅和费衍射，在透镜的后焦平面上形成一系列的衍射斑。第二步是将各个衍射斑作为新的光源，其发出的各个球面次波在像平面上进行相干叠加，像是干涉的结果，即干涉场。这就是阿贝成像原理。

可以用数学方法说明。

设物为正弦光栅，其发出的光波为  $\tilde{U}_O(x, y) = A_1(t_0 + t_1 \cos 2\pi f x)$ ，为三列平面波。

三列平面衍射波在透镜的像方焦平面上形成三个衍射斑  $S_{+1}$ ， $S_0$ ， $S_{-1}$ ，就是三个点光源。



三个衍射斑作为三个点光源，发出的球面波在像平面上进行相干叠加。在像平面上，应用衍射积分公式，其瞳函数振幅为分别为  $A_{\pm 1} \propto A_1 t_1 / 2$ ， $A_0 \propto A_1 t_0$ ，初位相分别为  $\varphi(\theta) = kL_0(\theta)$ ， $L_0(\theta)$  为光栅（物）中心到衍射场点、即焦平面上衍射斑点的光程。分别表示为  $BS_{\pm 1}$  和  $BS_0$ ，则三个次波光源的复振幅可写为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{+1} &\propto \frac{1}{2} A_1 t_1 \exp[ik(\overline{BS_{+1}})] & , & & \tilde{U}_0 &\propto A_1 t_0 \exp[ik(\overline{BS_0})] & , & \\ \tilde{U}_{-1} &\propto \frac{1}{2} A_1 t_1 \exp[ik(\overline{BS_{-1}})] . \end{aligned}$$

在像平面  $(x', y')$  的复振幅可以按如下方法求得

对于轴上物点  $S_0$ ，在像平面的复振幅为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(x', y') &\propto \tilde{U}_0 \exp[ik(\overline{S_0 B'})] \exp[ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}] \\ &\propto A_1 t_0 \exp[ik(\overline{BS_0 B'})] \exp[ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}] \end{aligned}$$

对于轴外物点  $S_{\pm 1}$ ，由于  $(x, y) \approx (z \sin \theta'_{\pm 1}, 0)$ ，其相因子中，

$$-ik \frac{x'x_0 + y'y_0}{z} = -ik \frac{x_{\pm 1}}{z} x' = -ik \sin \theta'_{\pm 1} x' , \text{ 所以有}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\pm 1}(x', y') &\propto \tilde{U}_{\pm 1} \exp[ik(\overline{S_{\pm 1} B'})] \exp[ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}] \exp[-ik \frac{x'x_0 + y'y_0}{z}] \\ &= \tilde{U}_{\pm 1} \exp[ik(\overline{S_{\pm 1} B'})] \exp[ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}] \exp[-ik(\sin \theta'_{\pm 1})x'] \\ &\propto \frac{1}{2} A_1 t_1 \exp[ik(\overline{BS_{\pm 1} B'})] \exp[ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}] \exp[-ik(\sin \theta'_{\pm 1})x'] \end{aligned}$$

由于物像之间的等光程性， $(\overline{BS_0 B'}) = (\overline{BS_{\pm 1} B'})$ ，可以把前两个位相因子合

$$\text{写作 } \varphi(x', y') , \text{ 即 } \varphi(x', y') = k(\overline{BS_0 B'}) + k \frac{x'^2 + y'^2}{2z} = k(\overline{BS_{\pm 1} B'}) + k \frac{x'^2 + y'^2}{2z}$$

三列波在像平面上相干叠加的干涉场为

$$\begin{aligned}\tilde{U}_I(x', y') &= \tilde{U}_0(x', y') + \tilde{U}_{+1}(x', y') + \tilde{U}_{-1}(x', y') \\ &= A_1 \exp[\varphi(x', y')] \left\{ t_0 + \frac{t_1}{2} [\exp(ik(\sin \theta'_{+1} x') + \exp(-ik \sin \theta'_{-1} x'))] \right\}\end{aligned}$$

根据阿贝正弦条件  $\frac{\sin \theta'_{\pm 1}}{\sin \theta_{\pm 1}} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{V}$ ， $V$  为像的横向放大率，于是有

$$\sin \theta'_{\pm 1} = \sin \theta_{\pm 1} / V, \text{ 即 } k \sin \theta'_{\pm 1} x' = k \sin \theta_{\pm 1} x' / V, \text{ 而}$$

$$k \sin \theta_{\pm 1} = \frac{2\pi}{\lambda} (\pm f \lambda) = \pm 2\pi f, \text{ 代入 } U_I \text{ 的表达式, 有}$$

$$\tilde{U}_I(x', y') \propto A_1 e^{i\varphi(x', y')} [t_0 + t_1 \cos(2\pi \frac{f}{V} x')]$$

$$\text{而物光波为 } \tilde{U}_O(x, y) = A_1 (t_0 + t_1 \cos 2\pi f x)$$

两者除相因子  $\varphi(x', y')$  之外，有相似的表达式。而相因子在强度表达式中不出现。故像与物有相同的光强分布。即物像之间是相似的。此外，有两点需要说明。

- (1) 物的空间频率为  $f$ ，而像的空间频率为  $fV$ ，或空间周期由  $d$  变为  $Vd$ ，表示像的几何放大或缩小，不影响像的质量。
- (2) 像质的反衬度可以通过交流部分与直流部分的比值体现，对于物像，都有

$$\gamma_O = \gamma_I = \frac{t_1}{t_0}, \text{ 即 } \frac{\gamma_I}{\gamma_O} = 1, \text{ 即像的反衬度没有下降。}$$

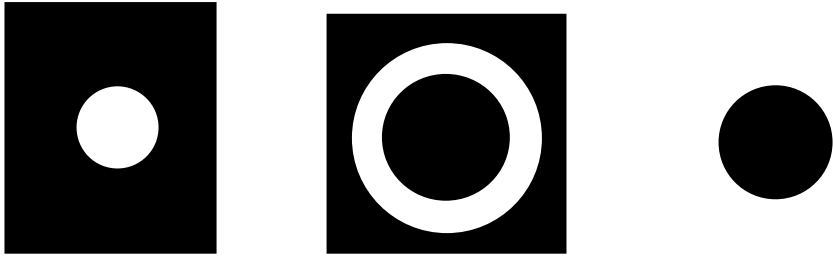
对于任意的物，都可以通过 Fourier 变换，使之成为一系列正弦光栅的和，所以上述证明具有普遍的意义。

## 二、阿贝成像原理的实验验证

### 1、关于空间滤波：

$$\sin \theta_{\pm} = \pm f \lambda = \pm \frac{1}{d} \lambda, \quad f = \frac{1}{d}, \text{ 衍射屏或物的空间频率。}$$

空间频率与波的衍射角相关，所以可以据此做成低通、高通或带通的滤波装置。

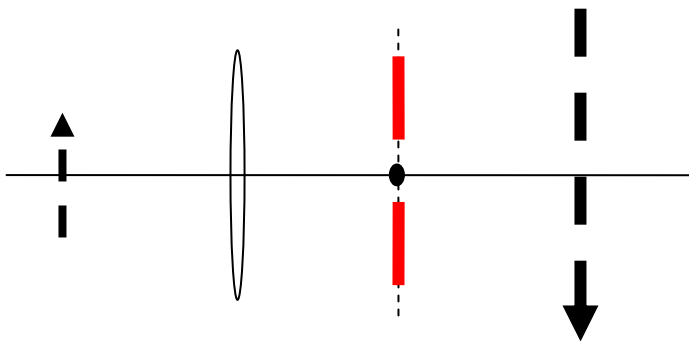


对于正弦光栅，仅有  $0, \pm 1$  级，而对于其它类型的周期或非周期的光栅，则存在一系列的分立或连续的空间频率。每一个频率都有相对应的衍射角，不同频率的波将会汇聚到透镜的像方焦平面，即傅氏面上。

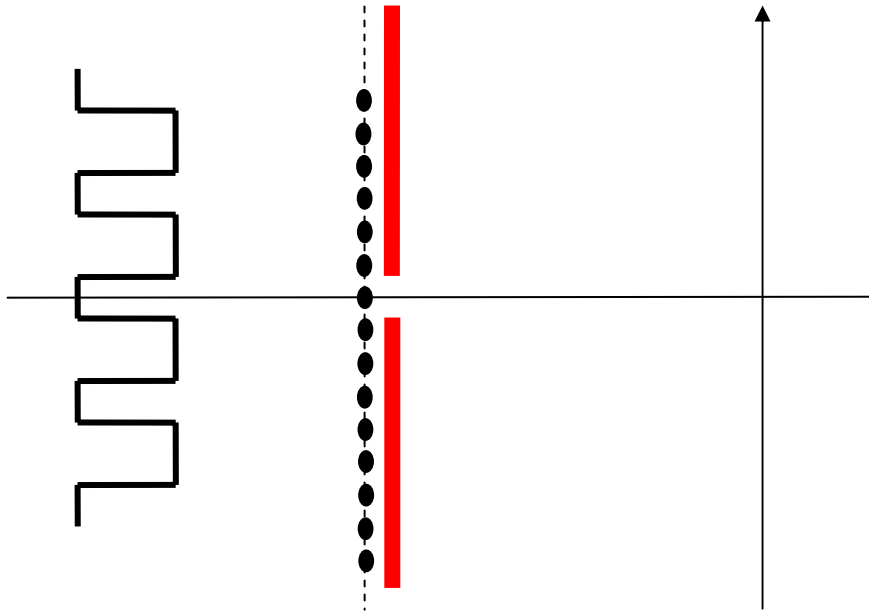
则在傅氏面上采用不同的装置可以起到空间滤波的效果。可以有低通、带通或高通的滤波器。

实际的物包含各种信息，即具有各种从低到高的空间频率，但透镜的口径总是有限的，所以会滤掉一些高频信息。但有时，需要对图像进行改造，这就要采取一些措施，进行滤波。

## 2、阿贝 (Abbe, 1874 年) — 波特 (Porter, 1906 年) 空间滤波实验



在傅氏面上加一可调狭缝，观察像的变化。以黑白光栅为物。



- (1) 只让 0 级，即直流成分通过，则像平面被 0 级斑发出的球面波照明。近轴条件下，被均匀照明。
- (2) 让 0 级和  $\pm 1$  级通过，则像平面上是 0 和  $\pm 1$  三个衍射斑发出的次波的相干叠加。在像平面上，它们的复振幅可表示为

$$\exp[ik \frac{x^2 + y^2}{2z}] \text{ 和 } \exp[ik(\frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_{\pm 1} + yy_{\pm 1}}{z})]$$

即有

$$\tilde{U}_I(x, y) = \exp[ik \frac{x^2 + y^2}{2z}] \{a_0 + a_1[\exp(-ik \frac{xx_{+1} + yy_{+1}}{z}) + \exp(-ik \frac{xx_{-1} + yy_{-1}}{z})]\}$$

由于  $x_{+1}$  和  $x_{-1}$  的对称性以及  $y$  方向上都是相同的，故可取  $y=0$ ，上式变为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_I(x, y) &= \exp[ik \frac{x^2}{2z}] \{a_0 + a_1[\exp(-ik \frac{xx_1}{z}) + \exp(ik \frac{xx_1}{z})]\} \\ &= \exp[ik \frac{x^2}{2z}] [a_0 + 2a_1 \cos(k \frac{x_1}{z} x)] \end{aligned}$$

其中前面的因子是共有的，则像面上的波的特征由振幅  $[a_0 + 2a_1 \cos(k \frac{x_1}{z} x)]$

决定。

值得注意的是，交流成分的空间频率为  $f_1 = \frac{k}{2\pi} \frac{x_1}{z} = \frac{x_1}{\lambda z}$ ，即高级次的衍射斑的空间频率高。交流与直流的相对振幅由  $a_0$  与  $2a_1$  的相对大小决定。如果  $2a_1 > a_0$ ，上式可以出现负值。

(3) 进一步展宽狭缝，使 0， $\pm 1$  和  $\pm 2$  级都通过，则有

$$\tilde{U}_1 = \exp[ik \frac{x^2}{2z}] [a_0 + 2a_1 \cos(k \frac{x_1}{z} x) + 2a_2 \cos(k \frac{x_2}{z} x)]$$

(4) 使 0 级之外的所有衍射斑都通过狭缝，则有

$$\tilde{U}_1 = 2 \exp[ik \frac{x^2}{2z}] [a_1 \cos(k \frac{x_1}{z} x) + a_2 \cos(k \frac{x_2}{z} x) + a_3 \cos(k \frac{x_3}{z} x) + a_4 \cos(k \frac{x_4}{z} x) + \dots]$$

### 三、相衬显微镜

普通显微镜容易观察透射率或反射率相差较大的样品，即振幅型样品。

但是对于均匀透明的样品，即透过率函数是位相型的样品，则由于反衬度太小而无法观察。

但是可以采用附加相移的办法改变透过率。

设样品的屏函数为  $\tilde{t}(x, y) = e^{i\varphi(x, y)}$ ，对振幅或光强的透过率没有变化。物平

面的波为  $\tilde{U}_o = A_1 \tilde{t}(x, y)$ 。依 Taylor 展开

$$\tilde{U}_o = A_1 e^{i\varphi(x, y)} = A_1 [1 + i\varphi - \frac{1}{2!} \varphi^2 - \frac{i}{3!} \varphi^3 + \dots]$$

在显微镜物镜的傅氏面处加一位相板，即在一玻璃板的中心加一小滴液体。该液体由于处于傅氏面上零级斑的位置，只能使直流成分产生相移。透过位相板的光波，即进入像面的光波变为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= \tilde{U}_o e^{i\delta} = A_1 e^{i\varphi(x, y)} e^{i\delta} \stackrel{\text{仅作用于0级}}{=} A_1 [e^{i\delta} + i\varphi - \frac{1}{2!} \varphi^2 - \frac{i}{3!} \varphi^3 + \dots] \\ &= A_1 [e^{i\delta} - 1 + 1 + i\varphi - \frac{1}{2!} \varphi^2 - \frac{i}{3!} \varphi^3 + \dots] = A_1 [e^{i\delta} - 1 + e^{i\varphi}] \end{aligned}$$

光强为  $I(x, y) = A_1^2 (e^{i\delta} - 1 + e^{i\varphi})(e^{-i\delta} - 1 + e^{-i\varphi})$

$$\begin{aligned}
 &= A_1^2 \{3 + 2[\cos(\varphi - \delta) - \cos\varphi - \cos\delta]\} \\
 &= A_1^2 [3 + 2(\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta - \cos\varphi - \cos\delta)]
 \end{aligned}$$

此时光强与位相有关。

可以使样品的厚度很小，因而  $\varphi \ll 1$ ，此时  $\sin\varphi \approx \varphi$ ， $\cos\varphi \approx 1$ ，上式变为

$$I = A_1^2 [1 + 2\varphi(x', y') \sin\delta]。 \sin\delta \text{ 为反衬度。如果使相移等于 } \pi/2, \text{ 则}$$

可以得到最大的反衬度。

上述方法称为位相反衬法，即位相法，由 Zernik 于 1935 年提出，1953 年获得诺贝尔物理学奖。

## § 5.4 夫琅和费衍射场的标准形式

夫琅和费衍射是光源和接收屏都与衍射屏相距无穷远的衍射。实际的衍射，除了上述按定义的衍射装置之外，还有其它的衍射装置。

远场接收、焦面接收、以及像面接收，等等。它们都可以按菲涅尔-基尔霍夫衍射积分公式求得

$$\tilde{U}(x', y') = -\frac{i}{2\pi} \iint (\cos\theta_0 + \cos\theta) \tilde{U}_2(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} dx dy$$

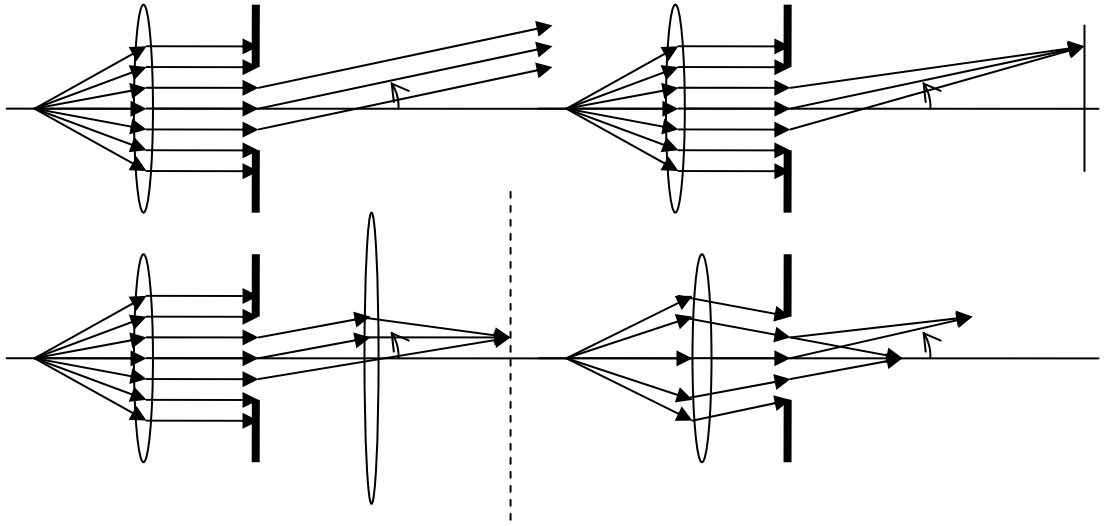
其中  $\tilde{U}_2(x, y) = \tilde{U}_1(x, y) \tilde{t}(x, y)$ ，衍射屏处的透射波前，即前面所定义的瞳函数。在傍轴条件下，上述积分化为

$$\tilde{U}(x', y') = C \iint \tilde{U}_2(x, y) e^{ikr} dx dy$$

平行光正入射时， $\tilde{U}_2(x, y) = A_1 \tilde{t}(x, y)$ ， $kr = kr_0 - kx \sin\theta_1 - ky \sin\theta_2$

$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ikr_0} \iint \tilde{t}(x, y) e^{-ik(x \sin\theta_1 + y \sin\theta_2)} dx dy$$

上述积分为夫琅和费衍射积分的标准形式。



对于远场接收，即物点满足远场条件时，波前  $(x, y)$  在像平面上的复振幅为

$$\tilde{U}(x', y') = \frac{A_1}{z} e^{ikr'_0} e^{-\frac{ik}{z}(xx' + yy')}$$

衍射积分为

$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ikr'_0} \iint \tilde{t}(x, y) e^{-\frac{ik}{z}(xx' + yy')} dx dy$$

其中  $r'_0 = z + \frac{x'^2 + y'^2}{2z}$ 。事实上，由于  $\sin \theta_1 \approx x'/z$ ， $\sin \theta_2 \approx y'/z$  远

场积分与定义积分一致。

$$\text{对于焦面接收，} \tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ikL_0} \iint \tilde{t}(x, y) e^{-ik(x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2)} dx dy$$

其中  $L_0$  为衍射屏中心到场点的光程。

对于像面接收，由于是球面波照明，衍射屏处的波前不再是等位相面。

可以设

$$\tilde{U}_1(x, y) = A_1 e^{i\phi_1(x, y)}$$

衍射积分公式为

$$\begin{aligned}\tilde{U}(x', y') &= C \iint \tilde{U}_1(x, y) \tilde{t}(x, y) e^{ik(r'_0 + \frac{x'^2 + y'^2}{2z'})} e^{\frac{-ik}{z'}(xx' + yy')} dx dy \\ &= CA_1 e^{ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z'}} \iint \tilde{t}(x, y) e^{i\varphi_1(x, y) + ik r'_0} e^{\frac{-ik}{z'}(xx' + yy')} dx dy \\ \varphi_1(x, y) + k r'_0 &= k[(SQ) + (QS')] = k(SQS')\end{aligned}$$

由于物像之间的等光程性，(SQS') 为恒定值，与物点的位置无关。将其记为常数  $L_0$ ，衍射积分为

$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{ikL_0} e^{ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z'}} \iint \tilde{t}(x, y) e^{\frac{-ik}{z'}(xx' + yy')} dx dy$$

也符合夫琅和费衍射积分的标准形式。

### § 5.5 空间滤波和信息处理

#### 一、用夫琅和费衍射实现屏函数的傅里叶变换

夫琅和费衍射的标准形式为

$$\tilde{U}(\theta_1, \theta_2) = CA_1 e^{i\varphi(\theta_1, \theta_2)} \iint \tilde{t}(x, y) e^{-ik(x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2)} dx dy$$

或

$$\tilde{U}(x', y') = CA_1 e^{i\varphi(x', y')} \iint \tilde{t}(x, y) e^{\frac{-ik}{z'}(xx' + yy')} dx dy$$

其中  $\varphi(\theta_1, \theta_2)$  和  $\varphi(x', y')$  为衍射屏中心到接收平面的位相差，在接收面的不同位置，具有不同的数值。

而屏函数的傅里叶变换为

$$T(f_x, f_y) = \iint \tilde{t}(x, y) e^{-i2\pi(xf_x + yf_y)} dx dy$$

可以很容易让被积函数的相因子相等，即

$$2\pi(f_x, f_y) = (k \sin \theta_1, k \sin \theta_2), \text{ 或 } 2\pi(f_x, f_y) = \frac{k}{z}(x', y')$$

如果积分式前面的因子是常数的话，或则对物理结果没有影响的话，则可以使得夫琅和费衍射变成屏函数的频谱。

- 1、如果只是一次衍射后获得衍射场的强度分布，则上述因子不起作用。
- 2、如果涉及二次衍射，则傅氏面上的位相分布影响到第二次相干叠加的结果。但若是傅氏面上有平面波，则上述相因子即为常数。将衍射屏置于透镜的前焦面即可。这时后焦面的复振幅分部即是准确的屏函数的傅里



叶频谱，当然两者相差一个常系数。可以写成  $\tilde{U}(x', y') = F\{\tilde{t}(x, y)\}$ 。

$$\text{同时有 } (f_x, f_y) = \frac{k}{2\pi F}(x', y') = \frac{1}{\lambda F}(x', y')。$$