第六章 运动电荷的辐射（6课时）

节次	节　　名	小节标题
6.1	李纳—维谢尔势	数学准备，李纳—维谢尔势，物理分析
6.2	运动电荷的电磁场	李纳—维谢尔势与（*r*, *t*）的函数关系剖析，$\partial t^*/\partial t$ 和 ∇t^*，其他带*号量的时空偏导数，***E*** 和 ***B***，匀速运动电荷的电磁场,切连柯夫辐射
6.3	运动电荷的辐射场和辐射功率	运动电荷的辐射场，运动电荷的辐射功率(瞬时值)
6.4	低速运动带电粒子的辐射	低速运动近似（β<<1），与电偶极辐射公式对比，经典电磁理论的局限性
6.5	高速运动带电粒子的辐射	加速度与速度平行，加速度与速度垂直，一般情形

- 处理方法
  - 由给定单个电荷的运动状态和推迟势公式计算电磁势;李纳—维谢尔势
  - 由李纳—维谢尔势精确计算电磁场（固有场＋辐射场）
  - 由辐射场计算辐射功率
- 物理分析
  - 匀速运动电荷的电磁场；切伦柯夫辐射
  - 低速运动带电粒子的辐射
  - 高速运动带电粒子的辐射

一 数学准备

1. 三维位置空间的积分变换（体积元变换）：

原积分变数： $\boldsymbol{r}'(x', y', z')$

新积分变数： $\boldsymbol{r}''(x'', y'', z'')$

相应体积分元的变换公式如下：

$$dV'' = dx''dy''dz'' = |J|\,dV', \quad J = \frac{\partial(x'', y'', z'')}{\partial(x', y', z')} = \det(\nabla'\boldsymbol{r}'') \qquad (6.1.2)$$

$$dV' = dx'dy'dz' = |J|^{-1}\,dV'' \qquad (6.1.3)$$

2. 并矢的性质

对于由任意矢量$\boldsymbol{f}$ 和$\boldsymbol{g}$ 构成的并矢$\boldsymbol{fg}$，成立

（1）对应矩阵的行列式为零： $\det(\boldsymbol{fg}) = 0$

张量对应矩阵的行列式通式： $\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}) = \varepsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k}$ （展开后即可证明）

$$\det(\boldsymbol{fg}) = \varepsilon_{ijk}(f_1 g_i)(f_2 g_j)(f_3 g_k) = f_1 f_2 f_3 \varepsilon_{ijk} g_i g_j g_k = f_1 f_2 f_3 \boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{g}) = 0.$$

（2）迹： $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{fg}) = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3 = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$

（3）对角元素的余子式：

$$A_{11} = \begin{vmatrix} f_2 g_2 & f_2 g_3 \\ f_3 g_2 & f_3 g_3 \end{vmatrix} = f_2 g_2 f_3 g_3 - f_2 g_3 f_3 g_2 = 0, \quad A_{22} = A_{33} = 0$$

3. 对任意张量 $\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}$ 成立：

$$\det(\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{I}} + \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}) = 1 + \mathrm{Tr}(\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}) + A_{11} + A_{22} + A_{33} + \det(\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}) \qquad (6.1.4)$$

展开后即可证明；详细证明过程如下：

$$\det(\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{I}} + \overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}}) = \varepsilon_{ijk}(\delta_{1i} + T_{1i})(\delta_{2j} + T_{2j})(\delta_{3k} + T_{3k})$$

$$= \underline{\varepsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k}} + \underline{(\varepsilon_{ijk}\delta_{2j}\delta_{3k}T_{1i} + \varepsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{3k}T_{2j} + \varepsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{2j}T_{3k})}$$

$$+ (\varepsilon_{ijk}\delta_{1i}T_{2j}T_{3k} + \varepsilon_{ijk}\delta_{2j}T_{1i}T_{3k} + \varepsilon_{ijk}\delta_{3k}T_{1i}T_{2j}) + \varepsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k}.$$

<u>第一项</u> $= \varepsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k} = \varepsilon_{123} = 1;$

<u>第二项</u> $= \varepsilon_{i23}T_{1i} + \varepsilon_{1j3}T_{2j} + \varepsilon_{12k}T_{3k} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \mathrm{Tr}(\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}});$

$$\det(\overleftrightarrow{I}+\overleftrightarrow{T})=\varepsilon_{ijk}(\delta_{1i}+T_{1i})(\delta_{2j}+T_{2j})(\delta_{3k}+T_{3k})$$

$$=\varepsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k}+(\varepsilon_{ijk}\delta_{2j}\delta_{3k}T_{1i}+\varepsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{3k}T_{2j}+\varepsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{2j}T_{3k})$$

$$+\underline{(\varepsilon_{ijk}\delta_{1i}T_{2j}T_{3k}+\varepsilon_{ijk}\delta_{2j}T_{1i}T_{3k}+\varepsilon_{ijk}\delta_{3k}T_{1i}T_{2j})}+\underline{\varepsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k}}.$$

第一项 $=\varepsilon_{ijk}\delta_{1i}\delta_{2j}\delta_{3k}=\varepsilon_{123}=1;$

第二项 $=\varepsilon_{i23}T_{1i}+\varepsilon_{1j3}T_{2j}+\varepsilon_{12k}T_{3k}=T_{11}+T_{22}+T_{33}=\mathrm{Tr}(\overleftrightarrow{T});$

<u>第三项</u> $=\varepsilon_{1jk}T_{2j}T_{3k}+\varepsilon_{i2k}T_{1i}T_{3k}+\varepsilon_{ij3}T_{1i}T_{2j}$

$$=(T_{22}T_{33}-T_{23}T_{32})+(T_{11}T_{33}-T_{13}T_{31})+(T_{11}T_{22}-T_{12}T_{21})=A_{11}+A_{22}+A_{33};$$

<u>第四项</u> $=\varepsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k}=\det(\overleftrightarrow{T});$ **将四项合并证得原式：**

$$\det(\overleftrightarrow{I}+\overleftrightarrow{T})=1+\mathrm{Tr}(\overleftrightarrow{T})+A_{11}+A_{22}+A_{33}+\det(\overleftrightarrow{T}) \tag{6.1.4}$$

对并矢情况，由上式及并矢性质得：

$$\det(\overleftrightarrow{I}+\boldsymbol{fg})=1+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g} \tag{6.1.5}$$

4. 运动点电荷的体电荷密度和体电流密度

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_e(t): \qquad \rho(\mathbf{r}',t)=e\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})=e\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_e(t)) \tag{6.1.6}$$

$$\boldsymbol{v}(t)=d\boldsymbol{r}_e(t)/dt: \qquad \boldsymbol{j}(\mathbf{r}',t)=e\boldsymbol{v}(t)\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})=e\boldsymbol{v}(t)\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_e(t)) \tag{6.1.7}$$

容易验证它们满足电荷守恒方程：

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t)}{\partial t}+\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\mathbf{r}',t)=0, \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\iiint_V \rho(\mathbf{r}',t)dV'+\oiint_S \boldsymbol{j}(\mathbf{r}',t)\cdot d\boldsymbol{\sigma}'=0$$

式中 V 为任意体积，S 为其边界（闭合曲面）

证明：利用三维 δ 函数性质可证

$$\frac{d}{dt}\iiint e\delta(\mathbf{r}'-\boldsymbol{r}_e(t))dV'=\frac{de}{dt}=0, \qquad \oiint_S e\boldsymbol{v}\delta(\mathbf{r}'-\boldsymbol{r}_e(t))\cdot d\boldsymbol{\sigma}'=0$$

$$\frac{d}{dt}\iiint e\delta(\mathbf{r}'-\boldsymbol{r}_e(t))dV'+\oiint e\boldsymbol{v}\delta(\mathbf{r}'-\boldsymbol{r}_e(t))\cdot d\boldsymbol{\sigma}=0$$

证毕

二　李纳—维谢尔势

从推迟势公式出发：

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}dV'=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t'))}{R}dV'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}dV'=\frac{\mu_0 e}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{v}(t')\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t'))}{R}dV'$$

$$t'=t-\frac{R}{c},\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\quad R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \qquad (6.1.11)$$

($\boldsymbol{r}$：场点；$\boldsymbol{r}'$：源点)

积分变量替换：　$\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t')$，　$dV'=|J|^{-1}dV''$

$$J=\det(\nabla'\boldsymbol{r}'')=\det[\nabla'\boldsymbol{r}'-\nabla'\boldsymbol{r}_e(t')]=\det\left(\overleftrightarrow{I}-\nabla't'\frac{d\boldsymbol{r}_e(t')}{dt'}\right)$$

$$\nabla't'=-\frac{1}{c}\nabla'R=\frac{1}{c}\nabla R=\frac{\boldsymbol{R}}{cR}\ \Longrightarrow\ J=\det\left(\overleftrightarrow{I}-\frac{\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}}{cR}\right)=1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR}$$

类比1.1节对单自变量δ函数的积分 $\int\delta(f(x))dx$ 的处理

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\delta(\boldsymbol{r}'')}{R}|J|^{-1}dV''=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\delta(\boldsymbol{r}'')}{R\left(1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{cR}\right)}dV''$$

$$\Rightarrow\quad\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\left[R\left(1-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{cR}\right)\right]_{r''=0}}\qquad(6.1.13)$$

$$\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t')=0\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}_e(t^*),\quad\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*,\quad t^*=t-\frac{R^*}{c}.\qquad(6.1.14)$$

说明：

1. 雅可比式 $J=1-\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR}\neq 0$，否则变换无效(由$v<c$，可知恒有$J>0$)

2. $\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_e(t')=0$只有一个零点，这与$t'$时刻粒子处于确定位置相关

3. 在新的符号下，式(6.1.13)化为：

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0R^*[1-\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*/(cR^*)]},\qquad\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0e\boldsymbol{v}^*}{4\pi R^*[1-\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*/(cR^*)]}$$

通称李纳－维谢尔势

三　物理分析

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^*[1-\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{v}^*/(cR^*)]},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0 e\mathbf{v}^*}{4\pi R^*[1-\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{v}^*/(cR^*)]}$$

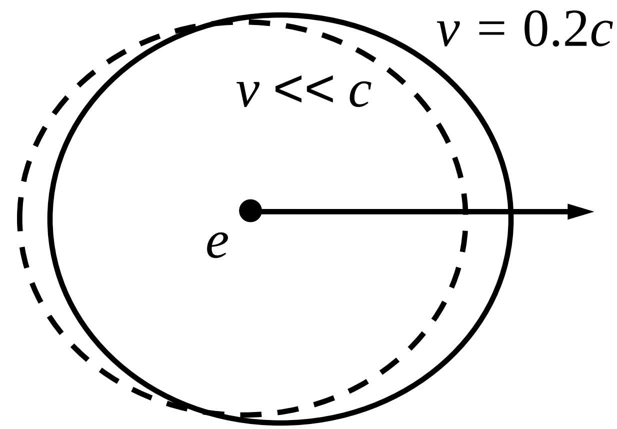

图6－1

1. 推迟效应：t 时刻电磁势由 $t^*=t-R^*/c$ 时刻粒子的运动状态决定，电磁场以光速 c 传播

2. 各向异性因子（分母方括弧中）：运动前方的电磁势大，后方小；垂直方向的空间变化梯度大，相应电磁场最强

3. 对缓慢运动电荷（$v \ll c$），忽略各向异性因子，得

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^*},\qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0 e\mathbf{v}^*}{4\pi R^*}$$

其中保留了推迟效应

有关公式：

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^*[1-\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*/(cR^*)]},\qquad(6.1.15)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0 e\boldsymbol{v}^*}{4\pi R^*[1-\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*/(cR^*)]}\qquad(6.1.16)$$

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}_e(t^*),\quad \boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*,\quad t^*=t-\frac{R^*}{c}.\qquad(6.1.14)$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\qquad(6.2.1)$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\qquad(6.2.2)$$

中心任务：由电磁势计算电磁场

数学工具：复合函数和隐函数的偏导数计算

一 李纳—维谢尔势与 (r, t) 的函数关系剖析

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 S^*} \qquad (6.2.3) \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0 e\mathbf{v}^*}{4\pi S^*} \qquad (6.2.4)$$

$$S^*=R^*-\frac{\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{v}^*}{c} \qquad (6.2.5) \qquad t^*=t-\frac{R^*}{c} \qquad (6.2.6)$$

$$\mathbf{R}^*=\mathbf{r}-\mathbf{r}^*,\ R^*=[(\mathbf{r}-\mathbf{r}^*)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}^*)]^{1/2},\ (6.2.7) \qquad \mathbf{r}^*=\mathbf{r}_e(t^*),\ \mathbf{v}^*=\mathbf{v}(t^*)\ (6.2.8)$$

1. 粒子状态量 $\mathbf{r}^*$ 和 $\mathbf{v}^*$ 为 t^* 的单变量显函数
2. 距离矢量 $\mathbf{R}^*$ 及其模 R^* 是 $\mathbf{r}$ 和 t^* 的显函数
3. 时间 t^* 是 $\mathbf{r}$ 和 t 的隐函数（由(6. 2. 6)和(6. 2. 7)式描述）
4. 自变量 t 仅出现在 t^* 之中

结论：电磁势是 $\mathbf{r}$ 和 t^* 的显函数，t^* 是 $\mathbf{r}$ 和 t 的隐函数，即

φ，$\mathbf{A}\sim f(\mathbf{r}, t^*(\mathbf{r}, t))$ 为 $\mathbf{r}$ 和 t 的复合函数，成立如下复合函数求导公式：

$$\frac{\partial}{\partial t}=\boxed{\frac{\partial t^*}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t^*} \qquad (6.2.9) \qquad \nabla=\nabla^*+\left(\boxed{\nabla t^*}\right)\frac{\partial}{\partial t^*}, \qquad \nabla^*\equiv(\nabla)_{t^*} \qquad (6.2.10)$$

隐函数求偏导数(关键)

二 $\partial t^*/\partial t$ 和 ∇t^* 的计算

$t^* = t - R^*/c$, $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^*$, $R^* = [(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)]^{1/2}$, $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}_e(t^*)$, $\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}(t^*)$

$$\frac{\partial t^*}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R^*}{\partial t}$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial t} = -\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*}{[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)]^{1/2}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}^*}{\partial t} = -\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}^*}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^*}{\partial t} = \frac{d\boldsymbol{r}^*}{dt^*}\frac{\partial t^*}{\partial t} = \boldsymbol{v}^*\frac{\partial t^*}{\partial t}$$

$$\frac{\partial t^*}{\partial t} = 1 + \frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}^*}{\partial t} = 1 + \frac{\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*}{cR^*}\frac{\partial t^*}{\partial t}$$

【注意】 求导过程中出现 R^* 和 $\boldsymbol{r}^*$ 等“中间量”对时间 t 的偏导数；它们可通过回代过程由已知的 $\partial t^*/\partial t$ ——反推出来！

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*/(cR^*)} = \frac{R^*}{S^*} \qquad (6.2.13)$$

$$t^* = t - R^*/c,\quad \boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^*,\ R^* = [(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)]^{1/2},\ \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}_e(t^*),\ \boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}(t^*)$$

$$\nabla t^* = -\frac{1}{c}\nabla R^*$$

$$\nabla R^* = \frac{\nabla[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)]}{2[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)]^{1/2}} = \frac{\nabla(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*)}{R^*}\cdot\boldsymbol{R}^* = [\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \nabla\boldsymbol{r}^*]\cdot\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*}$$

$$\nabla\boldsymbol{r}^* = (\nabla t^*)\frac{d\boldsymbol{r}^*}{dt^*} = (\nabla t^*)\boldsymbol{v}^*$$

【注意】求导过程中出现 R^* 和 $\boldsymbol{r}^*$ 等“中间量”的梯度；它们可通过回代过程由已知的 ∇t^* 一一反推出来！

$$\nabla t^* = -\frac{1}{c}[\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - (\nabla t^*)\boldsymbol{v}^*]\cdot\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*} = -\frac{1}{cR^*}\boldsymbol{R}^* + \frac{\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*}{cR^*}\nabla t^*$$

$$\Rightarrow\quad \nabla t^* = -\frac{\boldsymbol{R}^*}{cR^*}\cdot\frac{1}{1-\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*/(cR^*)} = -\frac{\boldsymbol{R}^*}{cS^*} \tag{6.2.16}$$

三 其它带星号上标物理量的时空偏导数

$$\frac{\partial t^*}{\partial t}=\frac{R^*}{S^*}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}^*}{\partial t}=-\frac{\partial \boldsymbol{r}^*}{\partial t}=-\boldsymbol{v}^*\frac{\partial t^*}{\partial t}=-\frac{R^*\boldsymbol{v}^*}{S^*}$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial t}=-\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}^*}{\partial t}=-\frac{\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*}{S^*}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^*}{\partial t}=\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt^*}\frac{\partial t^*}{\partial t}=\frac{R^*}{S^*}\boldsymbol{a}^*$$

$$\nabla t^*=-\frac{\boldsymbol{R}^*}{cS^*}$$

$$\nabla R^*=-c\nabla t^*=\frac{\boldsymbol{R}^*}{S^*}$$

$$\nabla \boldsymbol{r}^*=(\nabla t^*)\boldsymbol{v}^*=-\frac{\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{v}^*}{cS^*}$$

$$\nabla \boldsymbol{R}^*=\nabla \boldsymbol{r}-\nabla \boldsymbol{r}^*=\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}+\frac{\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{v}^*}{cS^*}$$

$$\nabla \boldsymbol{v}^*=\nabla t^*\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt^*}=-\frac{\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{a}^*}{cS^*}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{v}^*=\nabla t^*\times\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt^*}=-\frac{\boldsymbol{R}^*\times\boldsymbol{a}^*}{cS^*}$$

$$S^*=R^*-\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*/c$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial t}=\frac{\partial R^*}{\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{R}^*}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}^*-\frac{1}{c}\boldsymbol{R}^*\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}^*}{\partial t}$$

$$\nabla S^*=\nabla R^*-\frac{1}{c}(\nabla \boldsymbol{R}^*)\cdot\boldsymbol{v}^*-\frac{1}{c}(\nabla \boldsymbol{v}^*)\cdot\boldsymbol{R}^*$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial t}=\frac{1}{cS^*}(-c\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*+R^*v^{*2}-R^*\boldsymbol{a}^*\cdot\boldsymbol{R}^*) \tag{6.2.27}$$

$$\nabla S^*=\frac{\boldsymbol{R}^*}{S^*}\left(1-\frac{v^{*2}}{c^2}+\frac{1}{c^2}\boldsymbol{a}^*\cdot\boldsymbol{R}^*\right)-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}^* \tag{6.2.28}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^*}{\partial t}=\frac{R^*}{S^*}\boldsymbol{a}^* \quad (6.2.19) \qquad \nabla\times\boldsymbol{v}^*=-\frac{\boldsymbol{R}^*\times\boldsymbol{a}^*}{cS^*} \quad (6.2.14)$$

四 电磁场的计算

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 S^*} \Rightarrow -\nabla\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 S^{*2}}\nabla S^*$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0 e\boldsymbol{v}^*}{4\pi S^*} \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=\frac{\mu_0 e}{4\pi S^*}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}^*}{\partial t}-\frac{\boldsymbol{v}^*}{S^*}\frac{\partial S^*}{\partial t}\right)=-\frac{\mu_0 e}{4\pi S^{*2}}\left(-R^*\boldsymbol{a}^*+\frac{\partial S^*}{\partial t}\boldsymbol{v}^*\right)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0 e}{4\pi S^*}\left(\nabla\times\boldsymbol{v}^*-\frac{1}{S^*}\nabla S^*\times\boldsymbol{v}^*\right)=\frac{\mu_0 e}{4\pi S^{*2}}\left(-\frac{1}{c}\boldsymbol{R}^*\times\boldsymbol{a}^*-\nabla S^*\times\boldsymbol{v}^*\right)$$

利用(6. 2. 27)(6. 2. 28)式，最终求得电磁场的表达式(见下页)：

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 S^{*3}}\left\{\left(1-\frac{v^{*2}}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}^*-\frac{1}{c}R^*\boldsymbol{v}^*\right)+\frac{1}{c^2}\boldsymbol{R}^*\times\left[\left(\boldsymbol{R}^*-\frac{1}{c}R^*\boldsymbol{v}^*\right)\times\boldsymbol{a}^*\right]\right\} \tag{6.2.32}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{R}^*}{cR^*}\times\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 S^{*3}}\left\{-\frac{R^*}{c}\left(1-\frac{v^{*2}}{c^2}\right)\boldsymbol{v}^*-\frac{R^*}{c^3}\boldsymbol{R}^*\times(\boldsymbol{v}^*\times\boldsymbol{a}^*)-\frac{R^{*2}}{c^2}\boldsymbol{a}^*\right\} \tag{6.2.33}$$

在(6.2.33)式大括弧内加上 $\left(1-\frac{v^{*2}}{c^2}\right)\boldsymbol{R}^*+\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{a}^*)\boldsymbol{R}^*$，

对 $\boldsymbol{B}$ 没有影响；该式叉乘号右边的表达式正好等于 $\boldsymbol{E}$，因此有

$$\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{R}^*}{cR^*}\times\boldsymbol{E}\qquad\Rightarrow\quad\boldsymbol{E}=c\boldsymbol{B}\times\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*}\ \text{(见习题6.2)} \tag{6.2.34}$$

- 如何想到要在(6.2.33)式大括弧内加上一项？该项是如何得来的？
- (6.2.34)式表明，磁场始终与电场垂直，且与电场存在简单关系
- 对比谐振荡电流的辐射场计算（先$\boldsymbol{B}$后$\boldsymbol{E}$），这里是先$\boldsymbol{E}$后$\boldsymbol{B}$！
- 固有场和辐射场：$\begin{cases}\text{固有场只与速度有关，}E\propto 1/R^{*2},\ cB/E\sim v/c,\ \text{能流为零；}\\ \text{辐射场与加速度有关，}E\propto 1/R^{*},\ cB\sim E,\ \text{能流有限。}\end{cases}$
- 划分意义：远场近似，工程意义（两部分非严格意义上的电磁场！）

五 匀速运动电荷的电磁场

只存在固有场，表达式如下：

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 S^{*3}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}^*-\frac{1}{c}R^*\boldsymbol{v}\right),$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{R}^*}{cR^*}\times\boldsymbol{E}$$

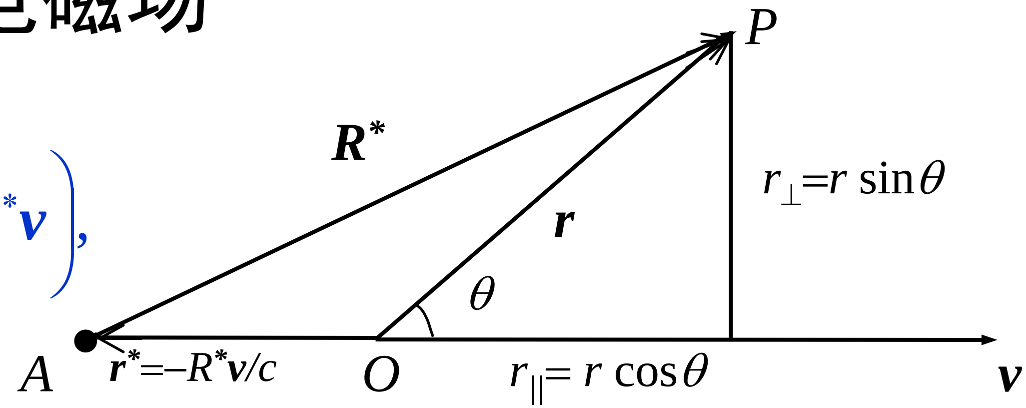

图6—2

- 目标：设法将电磁场写成考察位置 $\boldsymbol{r}$ 和考察时间 t 的显函数(关键在R^*)
- 技巧：选择考察时刻t 粒子的位置为坐标原点O，$\boldsymbol{v}$ 为极轴

（注意：仍为实验室参考系，而非随粒子运动的参考系！）

对考察点P（位置矢量$\boldsymbol{r}$），t^* 时刻粒子位于A 点，其位置矢量为

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}_e(t^*)=(t^*-t)\boldsymbol{v}=-\frac{R^*}{c}\boldsymbol{v}\Rightarrow \boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+\frac{R^*}{c}\boldsymbol{v} \qquad (6.2.36)$$

$$\Rightarrow R^{*2}=r^2+\frac{R^{*2}}{c^2}v^2+2\frac{R^*}{c}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=r^2+\frac{R^{*2}}{c^2}v^2+2\frac{vR^*}{c}r_{\|}$$

从中解出R^*

匀速运动电荷的电磁场（续）

$$R^{*2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-\frac{2vr_{\parallel}}{c}R^*-r^2=0 \Rightarrow R^*=\gamma^2\left(\frac{v}{c}r_{\parallel}+\sqrt{r_{\perp}^2/\gamma^2+r_{\parallel}^2}\right) \qquad (6.2.37)$$

式中

$$\gamma=1/(1-\beta^2)^{1/2},\quad \beta=v/c,\quad r_{//}=r\cos\theta,\quad r_{\perp}=r\sin\theta$$

重抄电场表达式：$\boldsymbol{E}=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 S^{*3}}\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}^*-\dfrac{1}{c}R^*\boldsymbol{v}\right)=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0\gamma^2 S^{*3}}\left(\boldsymbol{R}^*-\dfrac{1}{c}R^*\boldsymbol{v}\right)$,

$\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{r}+R^*\boldsymbol{v}/c$

$$S^*\equiv R^*-\frac{\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}}{c}=R^*-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{c}-\frac{v^2}{c^2}R^*=R^*\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-\frac{v}{c}r_{\parallel}$$

$$=\frac{v}{c}r_{\parallel}+\sqrt{r_{\perp}^2/\gamma^2+r_{\parallel}^2}-\frac{v}{c}r_{\parallel}=\sqrt{r_{\perp}^2/\gamma^2+r_{\parallel}^2}$$

$$\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}+\frac{R^*}{c}\boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{R}^*-\frac{1}{c}R^*\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}=\frac{\gamma e\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0(r_{\perp}^2+\gamma^2 r_{\parallel}^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B}=\frac{1}{cR^*}\boldsymbol{R}^*\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}=\frac{\gamma e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2(r_{\perp}^2+\gamma^2 r_{\parallel}^2)^{3/2}}$$

匀速运动电荷的电磁场（续）

$$\boldsymbol{E}=\frac{\gamma e\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0(r_\perp^2+\gamma^2 r_\parallel^2)^{3/2}}\qquad \boldsymbol{B}=\frac{\gamma e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2(r_\perp^2+\gamma^2 r_\parallel^2)^{3/2}}$$

$$\gamma=1/(1-\beta^2)^{1/2},\quad \beta=v/c,\quad r_{//}=r\cos\theta,\quad r_\perp=r\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E}=\frac{e(1-\beta^2)\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}},\quad \boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 e(1-\beta^2)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

物理分析：

- 相对考察时刻粒子位置，$\boldsymbol{E}\parallel\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{B}$位于方位方向
- 当$\theta=\pi/2$时，场强最强(对比电磁势分布：前强后弱）;随粒子速度增加，电磁场向运动垂直方向的集中程度加剧（见右图）
- 有$cB/E\sim v/c$，磁能密度/电能密度 ~ $(v/c)^2$：对低速运动粒子，电能远高于磁能
- 不存在辐射，电磁场随粒子一道运动 — 固有场

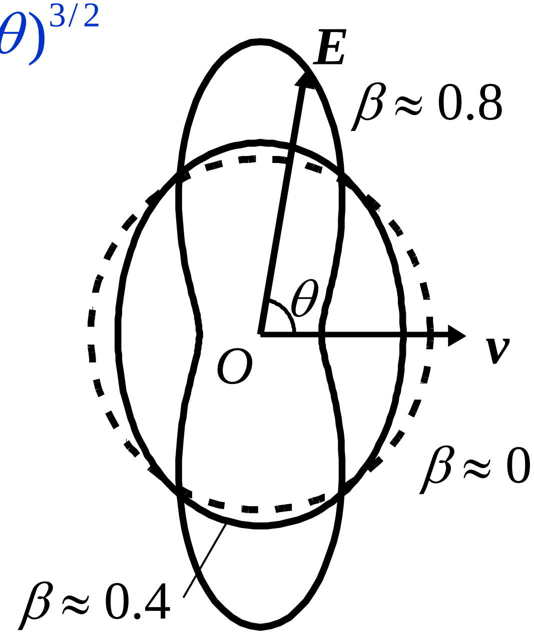

图6－3

六 切连科夫辐射

$$J = S^* / R^* = 1 - \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{R}^* / (cR^*) > 0$$

1. 李纳—维谢尔势成立条件

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 S^*}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 e \mathbf{v}^*}{4\pi S^*}, \quad S^* = R^* - \frac{\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{v}^*}{c}$$

$(S^* > 0)$

$J > 0$ 以及 $S^* > 0$ 均要求 $v^* < c$ $\begin{cases} \text{电磁势推导过程} \\ \text{电磁势非奇异} \end{cases}$

2. 李纳—维谢尔势表达式向均匀线性各向同性介质的推广

$$\varepsilon_0, \mu_0, c \rightarrow \varepsilon, \mu, u, \qquad u = 1/(\varepsilon\mu)^{1/2} = c/n$$

要求 $v^* < u$; 当 $v^* > u$ 时，李纳—维谢尔势失效！

失效之后果：

➢ 并非麦克斯韦电磁理论或由它推出的电磁势满足的达朗贝尔方程失效，而是解法（通过积分变量替换计算场源 δ 函数的积分）失效；必须采用傅里叶变换方法重新表述推迟势积分或求解达朗贝尔方程

➢ 介质中的超光速粒子会发出辐射 — 切连科夫辐射

3. 切连科夫辐射

- **发现过程：1934年，前苏联学者瓦维洛夫和他的学生切连科夫发现：伽玛射线进入液体介质后发出淡蓝紫色光锥，如图6－4虚线所示。他们确认不是受作用介质发出的荧光，而是一种新的现象**

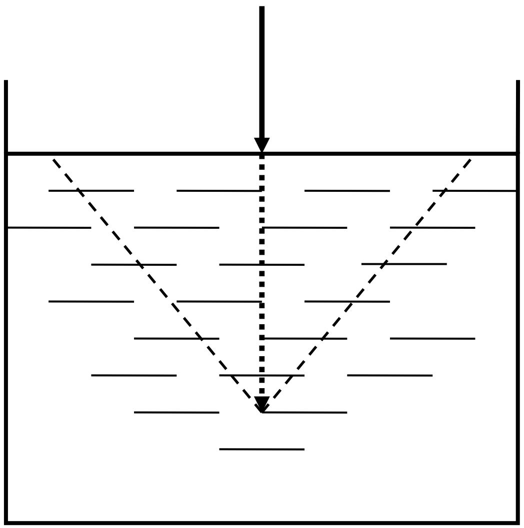

图6－4

- **物理解释：1937年，前苏联学者弗朗克和塔姆指出这种辐射来自伽玛射线与介质作用后形成的超（介质）光速电子，它与介质作用，产生辐射**

- **获奖情况：1946年前苏联国家金奖；1958年切连科夫、弗朗克和塔姆共享诺贝尔物理学奖（瓦维洛夫于1951年去世）**

➤ 定性解释 — 光冲击波

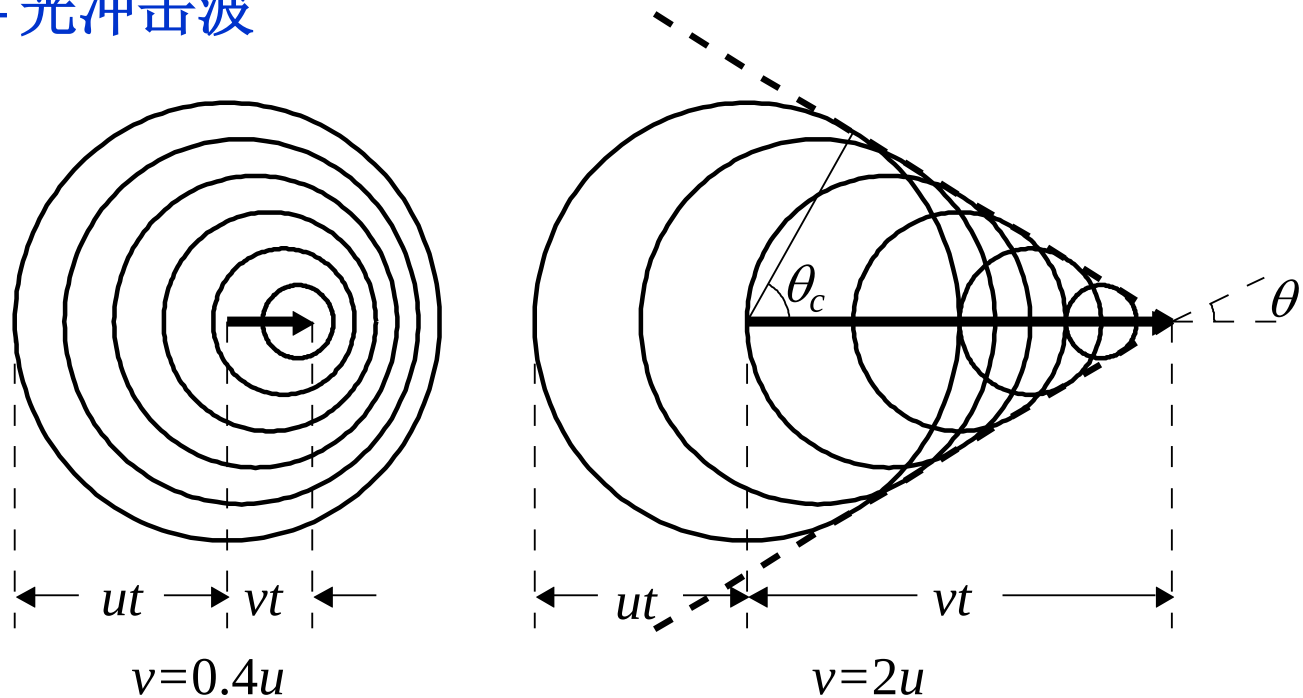

图6.5

当粒子速度超过介质中的光速时，粒子相继发出的子波彼此相交，发生干涉，诸子波的包络形成一个以粒子当前位置为顶点的锥面，称为光冲击波，如图右侧分图中的粗虚线所示.

切连科夫角： $$\cos\theta_c = \sin\theta = \frac{c}{nv} \qquad (6.2.44)$$

应用：切连科夫探测器；导致中微子及其它基本粒子的发现

一 运动电荷的辐射场

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 S^{*3}}\boldsymbol{R}^*\times\left[\left(\boldsymbol{R}^*-\frac{1}{c}R^*\boldsymbol{v}^*\right)\times\boldsymbol{a}^*\right] \qquad (6.3.1)$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{R}^*}{cR^*}\times\boldsymbol{E} \qquad (6.3.2)$$

⇒ $\begin{cases}\boldsymbol{E}、\boldsymbol{B}\text{ 和 }\boldsymbol{n}\text{ 满足右手正交关系}\\ cB\sim E,\text{ 电能和磁能密度相等（对比固有场）}\end{cases}$

$$S^*=R^*\left(1-\frac{\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*}{R^*c}\right),\qquad \boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*,\ \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}_e(t^*),\ t^*=t-\frac{R^*}{c}$$

定义：

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{R}^*}{R^*},\qquad \boldsymbol{\beta}^*=\frac{\boldsymbol{v}^*}{c} \qquad (6.3.5)$$

得

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R^*(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}^*)^3}\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}^*)\times\boldsymbol{a}^*]},\quad \boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E},\quad S^*=R^*(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}^*)$$

能流和能量密度瞬时值：

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=wc\boldsymbol{n},\qquad w=\frac{B^2}{\mu_0}=\varepsilon_0 E^2$$

$$\boldsymbol{S}=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^{*2}}\frac{|\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}^*)\times\boldsymbol{a}^*]|^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}^*)^6}\boldsymbol{n} \qquad (6.3.11)$$

⇒ 总能流有限

二　运动电荷的辐射功率（瞬时值）

1. 回顾静止时谐场源下的（平均）辐射功率计算

- t 时刻半径r 的球面上各点的电磁场为同一时刻$t^*= t - r/c$由场源发出
- 球面上的平均电磁能流密度与时间无关,与r^2成反比,为θ和φ的显函数
- 过球面对θ和φ积分平均电磁能流密度即获得平均辐射功率
- 结论：推迟效应引起的复合隐函数关系的积分复杂性得以避免

2. 运动电荷的辐射功率

- 非时谐电磁场，只能定义瞬时功率
- 场源处于运动状态，各时刻发出的子波非同心球面，不能简单地由电磁能流密度过某球面的积分获得辐射功率，必须另找出路
- 所得到的瞬时辐射功率应针对发射时间 t^* 定义，并视为 t^* 的函数
- 所涉及的积分运算：应固定考察时间 t，对位置空间（$\mathbf{r}$）积分；而不能固定 t^*，对 $\mathbf{r}^*$ 积分，后者是毫无意义的（为什么？）。

3. 运动电荷瞬时辐射功率的计算

考虑t^*至$t^*+\Delta t^*$期间粒子发射的电磁能，设为ΔW，则瞬时辐射功率为

$$P(t^*) = \lim_{\Delta t^* \to 0} (\Delta W / \Delta t^*)$$

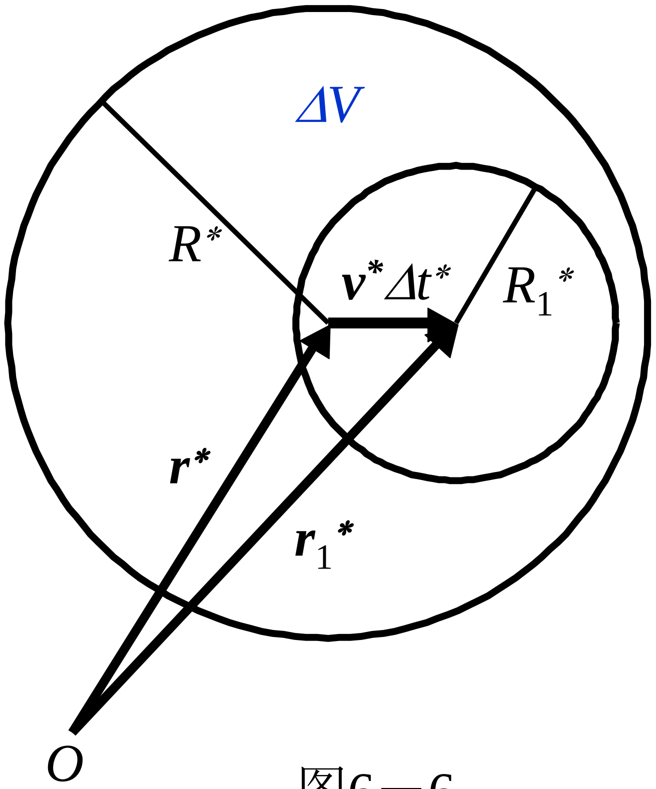

图6－6

下面的任务：计算ΔW

t^*时刻：粒子位置矢量 $\boldsymbol{r}^*$

$t^*+\Delta t^*$时刻：粒子位置矢量 $\boldsymbol{r}_1^*$

有 $\boldsymbol{r}_1^* = \boldsymbol{r}^* + \boldsymbol{v}^*\Delta t^*$

考察时刻： $t > t^* + \Delta t^*$

t^* 时刻粒子发出的子波球面半径为 R^*

$t^*+\Delta t^*$时刻粒子发出的子波球面半径为 R_1^*

有 $R^* = c(t-t^*),\quad R_1^* = c(t-t^*-\Delta t^*) < R^*$

在考察时间t，粒子在Δt^*期间发射的能量ΔW位于两个球面之间(ΔV)

运动电荷瞬时辐射功率的计算（续）

$$\Delta W = \iiint_{\Delta V} w(\boldsymbol{R}^*, t^*) dV$$ （ΔV：两球面之间的体积；积分固定t）

积分的困难在于:积分域不规则，被积函数是$\boldsymbol{r}$ 和t 的复合隐函数

这两个困难可通过如下积分变数替换同时得到解决：

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{R}^* \qquad dV = |J|^{-1} dV^*, \qquad J = \det(\nabla \boldsymbol{R}^*),$$

$$\nabla \boldsymbol{R}^* = \nabla(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^*) = \overleftrightarrow{I} + \frac{\boldsymbol{R}^* \boldsymbol{\beta}^*}{S^*} \qquad \det(\nabla \boldsymbol{R}^*) = 1 + \frac{\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{\beta}^*}{S^*} = 1 + \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta}^*}{1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta}^*} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta}^*}$$

$$\Rightarrow \quad dV = (1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta}^*) dV^* = (1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta}^*) R^{*2} dR^* d\Omega$$

$$\Delta W = \oiint d\Omega \int_{R_1^*}^{R^*} w(\boldsymbol{R}^*, t^*)(1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta}^*) R^{*2} dR^*$$

记住：积分固定t 而非t^* ;被积式仍为$\boldsymbol{R}^*$的复合隐函数!)

积分域变换为由两同心球面构成的球壳，其厚度为$\Delta R^* = R^* - R_1^* = c\Delta t^*$

相应复合隐函数积分的困难得以避免：对R^*的积分（固定t）代之以被积函数与$\Delta R^* = c\Delta t^*$ 的乘积：$\Delta W \approx c\Delta t^* \oiint w(\boldsymbol{R}^*, t^*)(1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta}^*) R^{*2} d\Omega$