

中国科学院 2007年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试题

高等数学（甲） 答案

一. 1. $\frac{1}{2}$ 2. $mn+m^2+n^2$ 3. $\frac{3}{2}(x+2)^{\frac{2}{3}} - 3(x+2)^{\frac{1}{3}} + 3\ln(1+\sqrt[3]{x+2}) + C$ 4. $2x$ 5. 4π

部分习题解析：1. 利用等价无穷小替换 $\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$

2. 利用高斯定理，需要去除奇点。

三. 1.B.2.C.3.D4.D5.A

三. 解：先验证 $\varphi(x)$ 是否连续。 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f(x)}{x} = f'(0) = \varphi(0)$ ，而 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上

连续。当 $x \neq 0$ 时， $\varphi'(x) = \frac{xe^x f(x) + xe^x f'(x) - e^x f(x)}{x^2}$ 当 $x=0$ 时，由导数定义可知： $\varphi'(0) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f(x) - f'(0)x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x f(x) + xe^x f'(x) - f'(0)x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f'(x) + 2e^x f'(x) + e^x f(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0) + f'(0)$$

对于 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f'(x) + e^x f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f''(x) + 2e^x f'(x) + e^x f(x)}{2} = \varphi'(0)$ ，从