

中国科学院 2016 年高等数学乙部分题目回忆和解答

一.证明圆的内接正多边形随着 n 的增多面积增大。

【解答】

设圆的半径为 r ，则其内接正 n 边形面积为 $S_n = \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \pi R^2 \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$ ，

$n \geq 3$ 。

令 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0, \pi]$ ，则 $f(x)$ 连续， $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ 。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，
 $f'(x) = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0$ ，而 $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ 时， $\cos x \leq 0$ ， $\sin x > 0$ ，故 $f'(x) < 0$ 。

故 $f(x)$ 为 $(0, \pi]$ 上的严格单调递减函数。