

中国科学院大学

2017 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题参考解答
科目名称：高等代数

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均无效。

-
1. (15 分) 证明: 实系数多项式 $f(x)$ 对所有实数 x 均有 $f(x) \geq 0$, 求证 $f(x)$ 可以写成两实系数多项式的平方和 $[g(x)]^2 + [h(x)]^2$.

证明: 参考王品超《高等代数新方法》下册 P22.

- (a) 若 $f(x) = 0$, 此时 $f(x) = 0^2 + 0^2$ 成立.
- (b) 若 $\deg f(x) = 0$, 即 $f(x) = a_0$, 这时 $a_0 > 0$, 我们有 $f(x) = 0^2 + (\sqrt{a_0})^2$.
- (c) 若 $\deg f(x) > 0$, 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 且 $a_n \neq 0$, 变形为

$$f(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \cdots + a_0 \frac{1}{x^n} \right)$$