第四章　电磁波的传播（9课时）

节次	节　　名	小节标题
4.1	电磁场波动方程和时谐电磁场	电磁场的波动方程，时谐电磁场，无限均匀、线性各向同性绝缘介质中的平面 .电磁波，电磁波的偏振
4.2	电磁波在绝缘介质界面上的反射和折射	定解问题的提法，定态波动方程和无散条件对反射波和折射波的约束，边值关系对反射波和折射波频率和波矢的约束，边值关系对反射波和折射波的幅度约束，物理分析，能量守恒和动量守恒关系
4.3	导体介质中的电磁波	基本方程，无限均匀导体中的平面电磁波，电磁波在导体表面的反射与折射
4.4	谐振腔和波导管	基本方程和边界条件，谐振腔，波导管

- 三类典型的电磁波问题：传播，激发，与介质相互作用
- 电磁场的波动性和波动方程，定解问题转换（传播问题）
- 时谐电磁场，独立齐次边值关系
- 绝缘介质和导体中的电磁波，电磁波在界面上的反射和折射
- 有限空间的电磁波的传播，谐振腔和波导管

一　电磁场的波动方程(分区均匀线性各向同性介质)

1. 基本方程

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, & \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_0+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_0, & \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \end{cases} \tag{4.1.1}$$

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}_0=0 \tag{4.1.2}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{j}_0=\sigma\boldsymbol{E},\quad \rho_0=0 \tag{4.1.3}$$

2. 边值关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0, & \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{i}_0 \\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_0, & \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{j}_{02}-\boldsymbol{j}_{01})=-\dfrac{\partial\sigma_0}{\partial t} & \end{cases} \tag{4.1.4}$$

绝缘介质、普通导体界面：　$\boldsymbol{i}_0=0$

绝缘介质界面：　$\sigma_0=0$

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=0 \end{cases} \tag{4.1.5}$$

齐次边值关系直接用于求解，非齐次边值关系事后用来确定界面场源

3. 电场波动方程

将电磁性能方程(4.1.3)代入麦克斯韦方程(4.1.1)得

$$\begin{cases} \boxed{\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}}, & \boxed{\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\sigma\boldsymbol{E}+\mu\varepsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0, & \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \end{cases} \tag{4.1.6}$$

运用矢量分析手段，从方程中消去$\boldsymbol{B}$，化作仅含$\boldsymbol{E}$ 的方程：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})=\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow\quad \nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{4.1.7}$$

类似步骤可导出

$$\nabla^2\boldsymbol{B}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0 \tag{4.1.12}$$

4. 电场波动方程的定解问题

- **原定解问题**

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \boxed{\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\sigma\boldsymbol{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4.1.6}$$

初始条件：$\boldsymbol{E}|_{t=0}=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{B}|_{t=0}=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})$; 边界条件：$\boldsymbol{E}_\tau|_S=\boldsymbol{E}_S$

- **新定解问题**

(a) 基本方程
$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{4.1.7}$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\quad \dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$（将证式(4.1.6)第二式自动成立）②

(b) 定解条件： 电场： $\boldsymbol{E}|_{t=0}=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}),\ \partial\boldsymbol{E}/\partial t|_{t=0}=\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{r})$;① $\boldsymbol{E}_\tau|_S=\boldsymbol{E}_S$

磁场： $\boldsymbol{B}|_{t=0}=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})$ （为何不需要标定边条件？）

- **新老定解问题之间的等效性**

$$\boxed{\left.\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})-\frac{\sigma}{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}$$

② $$\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})=\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\boldsymbol{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$ ①

$$\Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}\left\{\nabla\times\boldsymbol{B}-\mu\sigma\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right\}=0\ \Rightarrow\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\sigma\boldsymbol{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$ 证毕

二 时谐电磁场

1. **定义：**在空间任一点以稳恒振幅随时间作简谐周期变化的电磁场，称为时谐电磁场，或称为定态电磁场.

2. **时谐电磁场的复数表述**

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t},\qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{4.1.13}$$

3. **定态波动方程** $\partial/\partial t\ \to\ -\mathrm{i}\,\omega,\quad \partial^2/\partial t^2=-\omega^2$

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\boldsymbol{E},\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0,\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0 & (4.1.15)\\ k^2=\omega^2\varepsilon\mu+\mathrm{i}\,\omega\mu\sigma & (4.1.16)\\ \boldsymbol{B}=-\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E} & (4.1.17)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 & \end{array}\right.$$

- 由式**(4.1.17)**，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 自动满足
- 幅度因子满足的方程化为椭圆型，定解问题转化为边值问题，只需给定边界条件和无限远处的渐近条件
- 解的唯一性问题：需由时谐场叠加得通解，然后借助初始条件和其他外部约束条件解决；例如电磁波的反射和折射将证明解的唯一性

4. 时谐电磁场的边值关系

- 原边值关系

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0,\qquad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{i}_0$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_0,\qquad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \tag{4.1.4}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{j}_{02}-\boldsymbol{j}_{01})=-\frac{\partial\sigma_0}{\partial t}$$

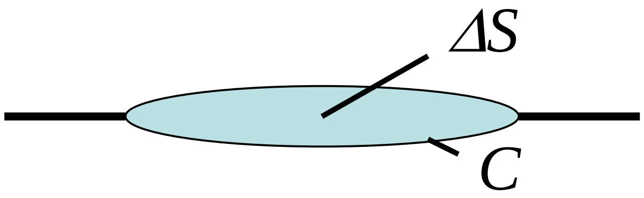
绝缘介质、普通导体界面： $\boldsymbol{i}_0=0$

绝缘介质界面： $\sigma_0=0$

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0\\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=0\end{cases} \tag{4.1.5}$$

- 齐次边值关系 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0$ 可由 $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$ 导出

$$\iint_{\Delta S}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega}\iint_{\Delta S}\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega}\oint_C\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$



$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=\lim_{\Delta S\to0}\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega\Delta S}\oint_C\boldsymbol{E}_\tau\cdot d\boldsymbol{l}$$

电场切向分量连续导致磁感应强度法向分量自动连续;对时谐场，后者不独立！

一般结论:切向分量连续的任意矢量场，其旋度的法向分量连续： $\boldsymbol{B}=-\dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E}$

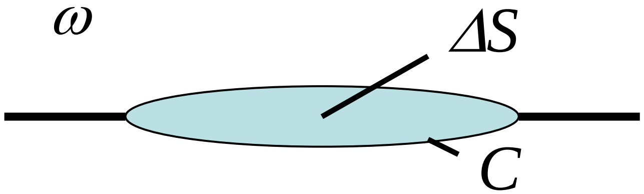
- 绝缘介质、普通导体界面($i_0=0$)： $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0$

(a) 绝缘介质界面： $\sigma_0=0$

齐次边值关系 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=0$ 可由 $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0$ 导出

证 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_0+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ ⟹ $\boldsymbol{D}=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{H}$

$$\iint_{\Delta S}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\iint_{\Delta S}\nabla\times\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{\mathrm{i}}{\omega}\oint_C\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}$$



$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\mathrm{i}}{\omega\Delta S}\oint_C\boldsymbol{H}_\tau\cdot d\boldsymbol{l}$$

磁场强度切向分量连续导致电位移矢量法向分量自动连续；后者不独立！

(b) 普通导体界面： $\sigma_0\neq 0$， $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_0$

关于电位移矢量法向分量的边值关系为非齐次，不直接用于求解，而是事后用来计算导体界面的自由面电荷密度

结论：用于求解时谐场的独立齐次边值关系如下： $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0,\quad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=0$

- 理想导体或超导体边界(体内 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}=0$)
  - 作为电磁场的边界
  - 与边值关系自洽的边界条件

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0 \Rightarrow \boldsymbol{E}_\tau=0$$

说明：$B_n=0$ 可由$\boldsymbol{E}_\tau=0$ 导出，即自动满足。

- 事后用于计算边界面上的传导电流密度和自由电荷密度

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{i}_0 \Rightarrow \boldsymbol{i}_0=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_0 \Rightarrow \sigma_0=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}$$

5. 复数表示下的乘法运算

- 乘积的瞬时值：取复数量的实部（瞬时值）之后进行乘法运算
- 乘积的周期平均值：可直接由复数量进行计算

类比交流电的平均功率表达式：

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(V^* I)$$

$\overline{P}$： 平均功率
V^*： 复电压(共轭)
I： 复电流

可写下电磁能密度、能流密度和功率密度

$$w = \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}), \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}, \quad p = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$$

的周期平均值：

$$\overline{w} = \frac{1}{4}\mathrm{Re}(\boldsymbol{D}^*\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{H}) \tag{4.1.21}$$

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}) \tag{4.1.22}$$

$$\overline{p} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{j}^*\cdot\boldsymbol{E}) \tag{4.1.23}$$

三 无限均匀线性各向同性绝缘介质中的平面电磁波

- **求解过程** $\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0,\ k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu,\ \boldsymbol{B} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E},\ \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$

用直角坐标下的分离变量法求解，对$\boldsymbol{E}$ 的某个分量u：

$$u = X(x)Y(y)Z(z)e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2 X,\quad \frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2 Y,\quad \frac{d^2Z}{dz^2} = -k_z^2 Z$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu,\qquad \boldsymbol{k} \equiv k_x \boldsymbol{e}_x + k_y \boldsymbol{e}_y + k_z \boldsymbol{e}_z$$ （波矢）

$$u = Ae^{\mathrm{i}k_x x} e^{\mathrm{i}k_y y} e^{\mathrm{i}k_z z} e^{-i\omega t} = Ae^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \Rightarrow \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

$$\nabla\cdot e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = \mathrm{i}\boldsymbol{k}e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \Rightarrow \nabla = \mathrm{i}\boldsymbol{k},$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0;\qquad \boldsymbol{B} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla\times\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$$

取实部：

$$\boldsymbol{k}\cdot\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}) = 0,\qquad \mathrm{Re}(\boldsymbol{B}) = \frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\mathrm{Re}(\boldsymbol{E})$$

- **物理分析**

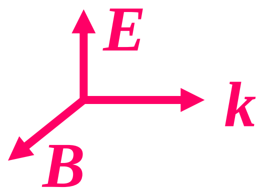
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)},\qquad k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2=\omega^2\varepsilon\mu$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0,\qquad \boldsymbol{B}=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$$

1. 平面波（波阵面为平面），沿波矢$\boldsymbol{k}$方向传播，相速度为

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{n},\quad n=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}\quad（n\text{ 为折射率}）\qquad(4.1.28)$$

2. 横波，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{k}$满足右手正交关系(见右图)



3. $\boldsymbol{E}$ 和$\boldsymbol{B}$ 同相变化，且 $|\boldsymbol{E}|=v|\boldsymbol{B}|$
4. 平均电磁能量密度、能流密度和动量密度：

$$\overline{w}=\frac{1}{2}\varepsilon|\boldsymbol{E}_0|^2=\frac{1}{2\mu}|\boldsymbol{B}_0|^2\qquad(4.1.28)$$

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\overline{w}v\boldsymbol{e}_k,\quad \boldsymbol{e}_k\equiv\boldsymbol{k}/k\qquad(4.1.29)$$

$$\overline{\boldsymbol{g}}=\frac{1}{v^2}\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{\overline{w}}{v}\boldsymbol{e}_k\qquad(4.1.30)$$

5. 平均动量流密度：

动量流密度表达式（瞬时值）： $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = w\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \boldsymbol{DE} - \boldsymbol{BH},$

$$w = \frac{1}{2}DE + \frac{1}{2}BH = DE = BH$$

相对基矢$(\boldsymbol{e}_E, \boldsymbol{e}_B, \boldsymbol{e}_k)$及其并矢展开（技巧：选择合适坐标系）

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{e}_E\boldsymbol{e}_E + \boldsymbol{e}_B\boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k, \quad \boldsymbol{DE} = DE\boldsymbol{e}_E\boldsymbol{e}_E, \quad \boldsymbol{BH} = BH\boldsymbol{e}_B\boldsymbol{e}_B$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}DE(\boldsymbol{e}_E\boldsymbol{e}_E + \boldsymbol{e}_B\boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k) + \frac{1}{2}BH(\boldsymbol{e}_E\boldsymbol{e}_E + \boldsymbol{e}_B\boldsymbol{e}_B + \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k) - DE\boldsymbol{e}_E\boldsymbol{e}_E - BH\boldsymbol{e}_B\boldsymbol{e}_B$$

瞬时动量流密度： $$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = w\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k \tag{4.1.33}$$

平均动量流密度： $$\overline{\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}} = \overline{w}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k \tag{4.1.34}$$

四 电磁波的偏振

1. 定义：横电磁波中电场的振动状态

- 针对横电磁波，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均与传播方向垂直
- 只需分析电场的振动状态：$\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{k}\times\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{E})\,/\,\omega$

2. 数学描述：不妨设电磁波沿 z 轴传播，$\boldsymbol{k} = k\,\mathbf{e}_z$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}, \qquad \boldsymbol{E}_0 = E_{0x}e^{\mathrm{i}\alpha_x}\boldsymbol{e}_x + E_{0y}e^{\mathrm{i}\alpha_y}\boldsymbol{e}_y,$$ (E_{0x},E_{0y}为正实数)

$$E_x = E_{0x}e^{\mathrm{i}(kz-\omega t+\alpha_x)} \qquad \mathrm{Re}\,E_x = E_{0x}\cos(kz-\omega t+\alpha_x),$$

$$E_y = E_{0y}e^{\mathrm{i}(kz-\omega t+\alpha_y)} \qquad \mathrm{Re}\,E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\alpha_y).$$

偏振度：

$$R = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}e^{\mathrm{i}(\alpha_y-\alpha_x)} = R_0 e^{\mathrm{i}\Delta\alpha} \quad \begin{cases} R_0 = E_{0y}/E_{0x}: & \text{偏振度的模} \\ \Delta\alpha = \alpha_y - \alpha_x: & \text{偏振度的辐角} \end{cases}$$

3. 分析步骤：

- 通过在Re (E_x)－Re (E_y)平面作图，描出电场矢尖运动轨迹
- 从电场矢尖运动轨迹判断偏振特性（个例分析）
- 按偏振度的模和辐角的取值给出偏振特性的定量判据（综合）

4. 典型结果

- 线偏振：电矢量矢尖轨迹为直线

  判据：偏振度 R 为实数（偏振度的辐角$\Delta\alpha=0$）

- 圆偏振：电矢量矢尖轨迹为圆周

  判据：偏振度为虚数单位，$\boldsymbol{R}=\pm i$

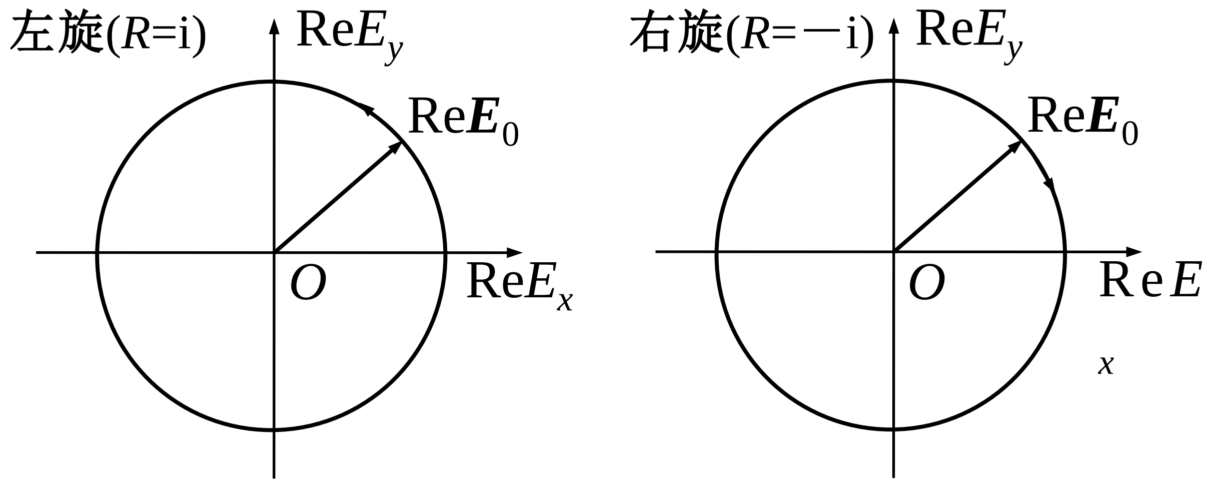


图4—1

右手定则：大拇指指向传播方向（纸面），电矢量旋转方向与四指方向一致为右旋，反之为左旋（也适合于椭圆偏振情况）

- 椭圆偏振：电矢量矢尖轨迹为椭圆

  判据：偏振度为复数；将辐角约化至（0，2π）范围，

  $0 < \Delta\alpha < \pi$:　左旋椭圆偏振（$R = \mathrm{i}$为左圆偏振）

  $\pi < \Delta\alpha < 2\pi$:　右旋椭圆偏振（$R = -\mathrm{i}$为右圆偏振）

- 任意（椭圆）偏振波的分解（参见4.1节末尾的定性陈述）

➢ 分解为 x 向线偏振波和 y 向线偏振

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$,　$\boldsymbol{E}_0 = E_{0x}\boldsymbol{e}_x + E_{0y}\boldsymbol{e}_y$　$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$: 线偏振基矢

➢ 分解为左旋圆偏振波和右旋圆偏振波　$E_{0x} = \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{E}_0$, $E_{0y} = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{E}_0$

$\boldsymbol{E}_0 = E_{01}\boldsymbol{e}_1 + E_{02}\boldsymbol{e}_2$　$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = (\boldsymbol{e}_x + \mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2} \\ \boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{e}_x - \mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2} \end{cases}$　：左旋圆偏振基矢；：右旋圆偏振基矢

复基矢正交归一关系：$\boldsymbol{e}_i^* \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$　$(i, j = 1,2)$, $E_{01} = \boldsymbol{e}_1^* \cdot \boldsymbol{E}_0$, $E_{02} = \boldsymbol{e}_2^* \cdot \boldsymbol{E}_0$

圆偏振与线偏振分量的关系：$E_{01} = (E_{0x} - \mathrm{i}\,E_{0y})/\sqrt{2}$,　$E_{02} = (E_{0x} + \mathrm{i}\,E_{0y})/\sqrt{2}$

- 自然光（非偏振光）：电矢量振动方向随机等概率分布，例如太阳光

一　定解问题的提法

1.　必要性：我们期望解的存在性和唯一性，即给定入射波就能唯一地确定反射波和折射波，从而给出反射折射规律的确定描述

2.　定解问题描述：电磁波从1侧入射至界面 $z=0$

给定入射波:　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0 e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$　（4.2.1)

$$k=\frac{\omega}{v_1},\qquad v_1=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}},\qquad k_z>0$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0,\qquad \boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_1}=\frac{1}{\omega\mu_1}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$$

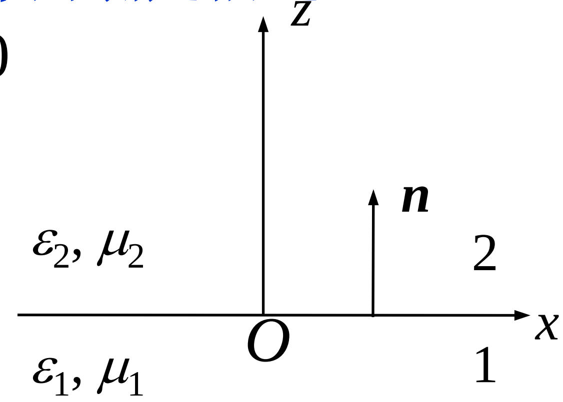


图4－2

确定反射波和折射波:

$$\boldsymbol{E}'=\sum_{\omega',\boldsymbol{k}'}\boldsymbol{E}_0'(\omega',\boldsymbol{k}')e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega' t)},\quad \boldsymbol{H}'=\sum_{\omega',\boldsymbol{k}'}\boldsymbol{H}_0'(\omega',\boldsymbol{k}')e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega' t)},\quad k_z'<0,\ z<0 \quad (4.2.5)$$

$$\boldsymbol{E}''=\sum_{\omega'',\boldsymbol{k}''}\boldsymbol{E}_0''(\omega'',\boldsymbol{k}'')e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega'' t)},\quad \boldsymbol{H}''=\sum_{\omega'',\boldsymbol{k}''}\boldsymbol{H}_0''(\omega'',\boldsymbol{k}'')e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}-\omega'' t)},\quad k_z''>0,\ z>0 \quad (4.2.6)$$

满足定态波动方程和无散条件，满足界面上的边值关系:

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}'' \quad (4.2.7),\qquad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}'' \quad (4.2.8);$$

$$\boldsymbol{H}_0'=\frac{1}{\omega'\mu_1}\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}_0',\quad \boldsymbol{H}_0''=\frac{1}{\omega''\mu_2}\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}_0'' \quad (4.2.9)$$

二 定态波动方程和无散条件对反射波和折射波的约束

$$k'=\frac{\omega'}{v_1},\quad v_1=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}};\quad k''=\frac{\omega''}{v_2},\quad v_2=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} \tag{4.2.10}$$

$$\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{E}_0'=\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{E}_0''=0 \tag{4.2.11}$$

三 边值关系对反射波和折射波的频率和波矢的约束

$$\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{\rho}-\omega't=\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{\rho}-\omega''t=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}-\omega t;\quad \boldsymbol{\rho}=x\,\boldsymbol{e}_x+y\,\boldsymbol{e}_y \tag{4.2.12}$$

由时间 t 的任意性推得

$$\omega'=\omega''=\omega \tag{4.2.13}$$

由(4.2.10) 得 $k'=k,\ k''=\dfrac{v_1}{v_2}k=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}k,\quad \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}$

不能由上式断定 $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}''=\boldsymbol{k}$！以考察点为原点，引入局地圆柱坐标：

$$\boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{\rho}/\rho=\boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{n}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\rho}=\rho\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{e}_\phi\times\boldsymbol{n})=\rho(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_\phi$$

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{e}_\phi=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}'')\cdot\boldsymbol{e}_\phi=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{e}_\phi \Longrightarrow \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}''=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k} \tag{4.2.16}$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}''=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k} \quad (4.2.16)$$

$$(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{k})=0,\quad (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}'')\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{k})=0$$

上式表明：反射波和折射波的波矢位于**n-k**平面（称为入射面）内。

取入射面为 x-z 平面，则

$$\boldsymbol{k}'=(k_x',k_z'),\qquad \boldsymbol{k}''=(k_x'',k_z''),\qquad \boldsymbol{k}=(k_x,k_z) \quad (4.2.17)$$

由(4.2.16)得

$$k_x'=k_x''=k_x \quad (4.2.18)$$

反射波和入射波的频率和波矢被唯一确定，原通解中求和不复存在。

四 反射定律和折射定律

由(4.2.18)得 $k'\sin\theta'=k\sin\theta=k''\sin\theta''$

$$\theta=\theta' \quad (4.2.19)$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{k''}{k}=\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}=\frac{n_2}{n_1}\equiv n_{21} \quad (4.2.20)$$

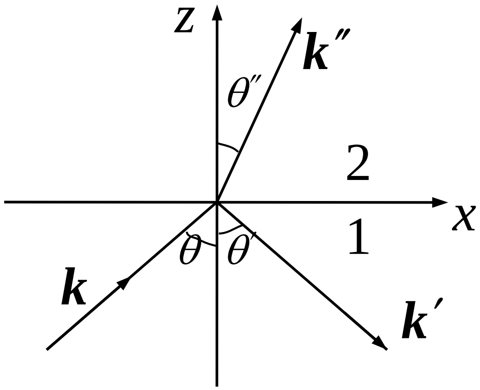


图4—3

五 边值关系对反射波和折射波的幅度约束

- 独立齐次边值关系

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}'',\qquad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}'';$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{E}''=0;\qquad \boldsymbol{H}'=\frac{1}{\omega\mu_1}\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}',\qquad \boldsymbol{H}''=\frac{1}{\omega\mu_2}\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}''$$

- 解的存在性和唯一性

$\boldsymbol{E}'$与$\boldsymbol{k}'$垂直，$\boldsymbol{E}''$与$\boldsymbol{k}''$垂直，各有两个独立分量；独立边值关系共计4个，解唯一存在。

- 尝试分两种情况进行求解：

1. $\boldsymbol{E}$垂直于入射面，2. $\boldsymbol{E}$平行于入射面；

➢ 依据：叠加原理

➢ 目的：将4元代数方程化为两组2元代数方程求解，简化计算过程

1. $\boldsymbol{E}$垂直于入射面

猜测： $\boldsymbol{E}'$和$\boldsymbol{E}''$也垂直于入射面；

规定： 指向纸面为电场正向，按电场、磁场、波矢右手正交关系标出磁场强度正向，示于图4－4

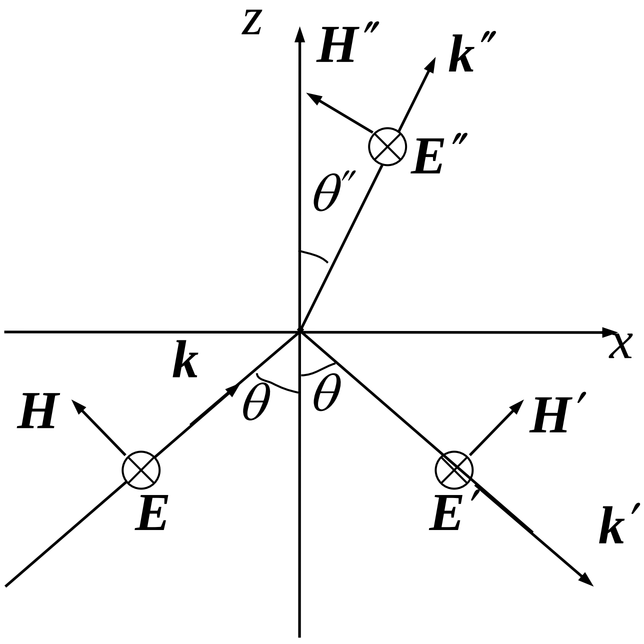


图4－4

$$E + E' = E''$$

$$\begin{cases} H\cos\theta - H'\cos\theta = H''\cos\theta'' \\ H = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}E,\quad H' = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}E',\quad H'' = \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}E'' \end{cases}$$

以下一律取 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E - E')\cos\theta = \sqrt{\varepsilon_2}E''\cos\theta''$$

$$\begin{cases} \dfrac{E'}{E} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = -\dfrac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}, \\ \dfrac{E''}{E} = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = \dfrac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}. \end{cases} \qquad (4.2.21)$$

2. $\boldsymbol{E}$平行于入射面（$\boldsymbol{H}$ 垂直于入射面）

猜测： $\boldsymbol{H}'$和$\boldsymbol{H}''$也垂直于入射面；

规定： 指向纸面为磁场正向，按电场、磁场、波矢右手正交关系标出电场强度正向，示于图4－5

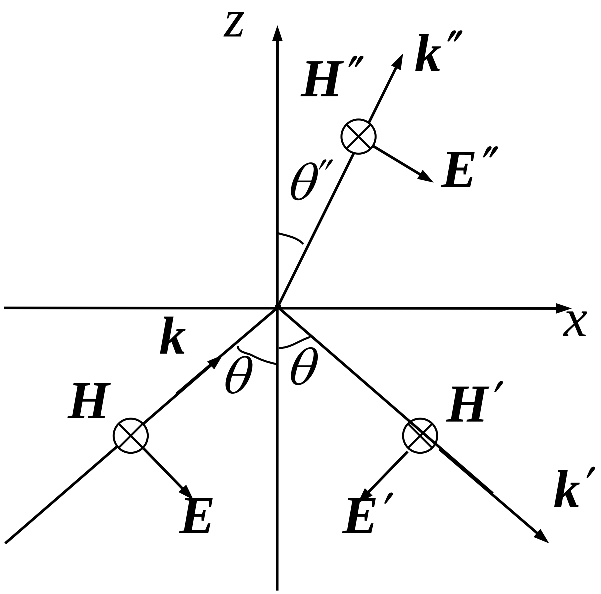


图4－5

$$(E - E')\cos\theta = E''\cos\theta''$$

$$\begin{cases} H + H' = H'' \\ H = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_0}\,E, \quad H' = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_0}\,E', \quad H'' = \sqrt{\varepsilon_2/\mu_0}\,E'' \end{cases}$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}(E + E') = \sqrt{\varepsilon_2}\,E''$$

$$\begin{cases} \dfrac{E'}{E} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''} = \dfrac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')}, \\[2ex] \dfrac{E''}{E} = \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''} = \dfrac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta + \theta'')\cos(\theta - \theta'')}. \end{cases} \tag{4.2.22}$$

式（4.2.21）和（4.2.22）：菲涅耳公式

4.2 电磁波在绝缘介质界面上的反射和折射

E 垂直于入射面：

$$\frac{E'}{E}=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}=-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')},$$

$$\frac{E''}{E}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}.$$

E 平行于入射面：

$$\frac{E'}{E}=\frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''}=\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')},$$

$$\frac{E''}{E}=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta+\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''}=\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}.$$

菲涅耳公式

六　物理分析

1. 偏振特性：两种偏振波的反射波和折射波幅度不同；自然光经反射和折射后变为部分偏振光。特别当$\theta+\theta''=90^{\circ}$时，***E*** 平行于入射面的波不发生反射，反射波为偏振方向与入射面垂直的线偏振波。（布儒斯特定律；布儒斯特角）

- 半波损失：当$\varepsilon_2>\varepsilon_1$时，有$\theta>\theta''$，对***E***垂直入射面的情况，有$E'/E<0$，反射波与入射波反相，称为半波损失。
- 全反射：当$\varepsilon_2<\varepsilon_1$时，有$\theta<\theta''$；当入射角$\theta$大于某个临界值时，$\theta''$将达到90°或失去意义，折射波消失，入射波发生全反射。

全反射的数学分析： $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\dfrac{k''}{k}=\dfrac{n_2}{n_1}=n_{21}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}},\quad \varepsilon_2<\varepsilon_1 \Rightarrow n_{21}<1$

临界入射角： $\sin\theta_c=n_{21}$ $\begin{cases}\theta=\theta_c \Rightarrow \theta''=\pi/2; \\ \theta>\theta_c \Rightarrow \sin\theta''>1,\quad \theta''\text{为虚数！}\end{cases}$

这表示，k“为复数矢量；而在复数法中，波矢允许为复数量，其实部为物理波矢(正余弦函数)，虚部反映平面波随空间的衰减(指数函数)。

$$k''_x=k_x=k\sin\theta,\qquad k''=\sqrt{k''^2_x+k''^2_z}=kn_{21}$$

$$k''_z=\sqrt{k''^2-k''^2_x}=k\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta}=\mathrm{i}\kappa,\qquad \kappa=k\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}$$

折射波电场：
$$\boldsymbol{E}''(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}''_0e^{\mathrm{i}(k''_xx+k''_zz-\omega t)}=\boldsymbol{E}''_0e^{-\kappa z}e^{\mathrm{i}(k_xx-\omega t)}$$

- 折射波沿界面传播，沿 z 向指数衰减，此时有

$$\sin\theta''=\sin\theta/n_{21},\qquad \cos\theta''=\sqrt{1-(\sin\theta/n_{21})^2}=\mathrm{i}\kappa/(\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_0}) \Rightarrow |E'/E|=1$$

反射系数为1，即发生全反射

- 传播速度为 $v''=\omega/k_x=v_1/\sin\theta$，由介质1波速和入射角决定；

- 折射波不是横波

横波条件：

$$E''_{0x} = H''_{0x} = 0$$

$$\mathbf{k}'' = k_x \mathbf{e}_x + i\kappa \mathbf{e}_z \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{E}''_0 = k_x E''_{0x} + \mathrm{i}\kappa E''_{0z} = 0 \\ \mathbf{H}''_0 = \dfrac{1}{\omega\mu_0}\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0 = \dfrac{k_x}{\omega\mu_0}\mathbf{e}_x \times \mathbf{E}''_0 + \dfrac{\mathrm{i}\kappa}{\omega\mu_0} E''_{0y}\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}''_0 \end{cases}$$

将可能出现电场或磁场沿 x 方向的分量，从而破坏横波条件

(1)入射波电场垂直入射面($\mathbf{E}''_0 = E''_{0y}\mathbf{e}_y$)，电场与 x 方向垂直，但 $H''_{0x} \neq 0$：

$$\mathbf{H}''_0 = \frac{1}{\omega\mu_0}\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0 = -\frac{\mathrm{i}\kappa}{\omega\mu_0} E''_{0y}\mathbf{e}_x + \frac{k_x}{\omega\mu_0} E''_{0y}\mathbf{e}_z$$

(2)入射波磁场垂直入射面，磁场与 x 方向垂直，但

$$E''_x = E''\cos\theta'' = \frac{\mathrm{i}\kappa E''}{\omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_0}}$$

【备注】 当波矢为复数量时，无散条件($\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0$) $\neq$ 横波条件！

七　能量守恒和动量守恒关系（物理分析之继续）

1.　能量守恒关系

- 直觉分析

$$\begin{cases} \text{入射波能流：} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\Delta A \\ \text{反射波能流：} -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}'\Delta A \\ \text{折射波能流：} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}''\Delta A \end{cases}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\Delta A = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}'\Delta A + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}''\Delta A$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}') = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}''$$

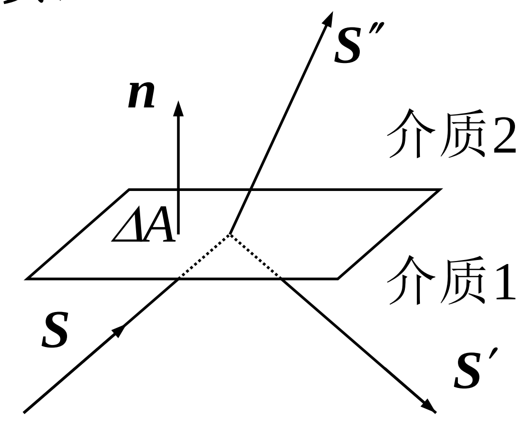


图4—6

- 严格证明

从1.4节给出的能流密度的边值关系出发：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}'', \quad \boldsymbol{S}_1 = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}')\times(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}') = \boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}'+\underline{\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}'}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\omega\mu_1}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H}' = \dfrac{1}{\omega\mu_1}\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}', \\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0, \quad \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{E}' = 0, \quad k_z = -k_z', \quad \boldsymbol{k}_\tau = \boldsymbol{k}_\tau', \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}') = 0 \qquad (4.2.30)$$

- 反射系数和透射系数

$$R = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overline{\boldsymbol{S}'}|}{|\boldsymbol{n}\cdot\overline{\boldsymbol{S}}|} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_1|E_0'|^2 v_1\cos\theta}{\frac{1}{2}\varepsilon_1|E_0|^2 v_1\cos\theta} = \frac{|E_0'|^2}{|E_0|^2} = \left|\frac{E'}{E}\right|^2 = \frac{\overline{w'}}{\overline{w}}, \quad T = 1-R$$