第七章 电磁波的散射、色散和吸收（6课时）

节次	节 名	小节标题
7.1	电磁质量和辐射阻尼	带电粒子的受力计算，能量分析，电磁质量，辐射阻尼，辐射阻尼力公式的修正
7.2	介质对电磁波的散射	散射的定义，自由电子对电磁波的散射，束缚电子对电磁波的散射
7.3	介质对电磁波的色散和吸收	物理模型，求解步骤，电磁波的色散和吸收

- 在一定近似下分析场源载体与电磁场的相互作用
  - 只考虑介质中电子的运动(高频近似)，介质处于宏观静止状态
  - 电子运动方程线性，做简谐周期运动；对应电磁场为时谐平面电磁波
  - 粒子速度远远低于光速（低速运动近似）
- 两个层次：
  - 第一层次：只考虑外电磁场对电子的作用，略去电子对外场的反作用：在给定外场中计算电子运动及其产生的辐射（电磁波的散射）
  - 第二层次：考虑电子和电磁场的相互作用：联立求解电子运动方程和麦克斯韦方程（电磁波的色散和吸收）
- 从洛伦兹力公式出发计算自身场对电子的作用力(惯性力,辐射阻尼力)

一 带电粒子受自身电磁场作用的定性分析

- 定性分析来自物理直觉
  - 常常获得基本正确的定性或定量结果，给科学研究带来启示
  - 有时也会出错，起误导作用；只能视为猜想，需严格论证
- 自身场对电子作用的定性分析
  - 粒子和它的场视为两个客体，二者之间存在相互作用
  - 定性分析的出发点：爱因斯坦质能关系；能量和能量守恒
  - 惯性力：固有场所携带的电磁能（主要为静电能W_0）对应一种惯性

电磁质量： $m_{\text{em}} = W_0 / c^2$（质能关系） ⇒ $\boldsymbol{F}_{惯性力} = -m_{\text{em}}\dot{\boldsymbol{v}}$

  - 辐射阻尼力 $\boldsymbol{F}_R$：

辐射功率（低速近似）： $P = \dfrac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$ 等于电子机械能的减小（能量守恒）

$$-\int_0^T \boldsymbol{F}_R\cdot\boldsymbol{v}dt = \int_0^T Pdt = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_0^T \dot{\boldsymbol{v}}^2 dt = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})_0^T - \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\int_0^T \ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}dt$$

对周期运动情况： $\boldsymbol{F}_R = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}$

- 疑问： $\boldsymbol{F}_{惯性力} = m_{\mathrm{em}}\dot{\boldsymbol{v}} = -\dfrac{W_0}{c^2}\dot{\boldsymbol{v}}$ $\boldsymbol{F}_R = \dfrac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}$

➢ 将力学规律（质能关系）引入电磁规律的合法性有待论证

➢ 假定辐射来自电子的机械能（动能）有何依据？电子做非周期运动怎么办？匀加速电子有辐射，为何 $\boldsymbol{F}_R = 0$？

- 定性分析结论的后果分析：

➢ 对本章所述电子与电磁波相互作用分析不会带来负面后果

a) 将电磁质量视为电子观测质量的一部分，不计入电子运动方程

b) 将电子运动的分析限于周期运动，以至上述辐射阻尼力与能量守恒不矛盾：电子损失机械能，辐射电磁能

➢ 某种误导作用

a) 惯性力的本质：来自固有场对粒子的作用？

b) 辐射阻尼力公式仅对周期运动成立，或只是在平均意义上成立？
如果这样,至多只能用来分析粒子的缓慢运动而非快速周期运动！

a) 电磁理论（洛伦兹力公式）本身解决不了电子受自身场作用的问题？

- 严格（自洽）处理：从洛伦兹力公式出发计算自身场对电子的作用力

二 带电粒子的受力计算（限于低速运动粒子）

以(v/c)为小参数：

$$\boldsymbol{F}=\iiint\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})dV \qquad (7.1.1)$$

$\boldsymbol{E}=e\boldsymbol{R}^*/(4\pi\varepsilon S^{*3})$(0级)，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{R}^*\times\boldsymbol{E}^*/(cR^*)$(1级)，磁力/电力 ~ $(v/c)^2$，略去磁力：

$$\boldsymbol{F}=\iiint\rho\boldsymbol{E}dV \qquad (7.1.2)$$

取粒子中心为坐标原点O，考虑位于$\boldsymbol{r}'$的体积元dV'对位于$\boldsymbol{r}$的体积元dV的作用力，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$

dV'产生的元的电场：

$$d\boldsymbol{E}=\frac{\rho' dV'}{4\pi\varepsilon_0 S^{*3}}\left\{\left(1-\frac{v^{*2}}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}^*-\frac{1}{c}R^*\boldsymbol{v}^*\right)+\frac{1}{c^2}\boldsymbol{R}^*\times\left[\left(\boldsymbol{R}^*-\frac{1}{c}R^*\boldsymbol{v}^*\right)\times\boldsymbol{a}^*\right]\right\} \qquad (7.1.3)$$

$$S^*=R^*\left(1-\frac{\boldsymbol{R}^*\cdot\boldsymbol{v}^*}{R^*c}\right),$$

$$\boldsymbol{R}^*=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^*,\quad \boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}'(t^*)$$

$$t^*=t-R^*/c,\quad \boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{v}(t^*),\quad \boldsymbol{a}^*=\boldsymbol{a}(t^*)$$

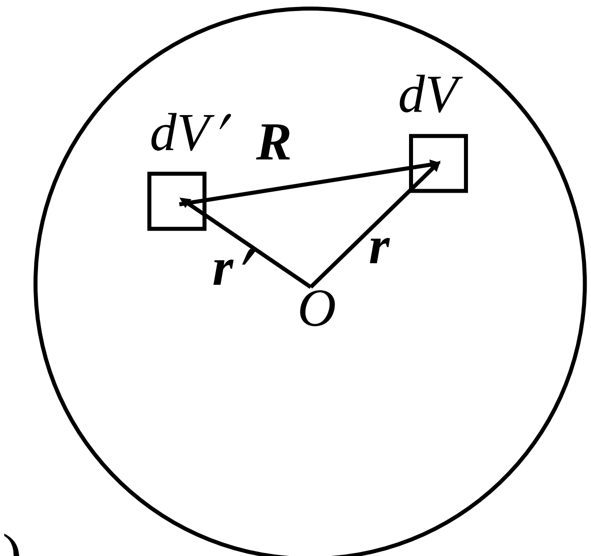

图7－1

带电粒子受力计算（续）：使用泰勒展开化简元电场表达式

- 低速运动近似：略去速度及其时间导数的乘积项(以 $\beta = v/c$ 为小参数)
- 快速传播近似：电磁作用传播时间 τ_c << 粒子运动状态变化时间 τ_m：

$$\tau_c \sim R^* / c << |\mathbf{v}| / |\dot{\mathbf{v}}|,\ |\dot{\mathbf{v}}| / |\ddot{\mathbf{v}}| \sim \tau_m$$（要求粒子尺寸 $R^* <<$ 波长 $\lambda \sim c\tau_m$）

引入另一个独立小参数：$\delta = \tau_c / \tau_m \sim l / \lambda$

- 两个小参数（β 和 δ）之间的关系分析：彼此独立
- 展开规则：关于 β 只保留 一级；关于 δ 保留至二级（零级无贡献）

试对比辐射场近似(只保留 l/r)和按(l/λ)做的多极子展开

时谐场源辐射场	带电粒子受力
辐射场近似：只保留(1/r)级	低速运动近似：只保留(v/c)级
小场源近似：只保留至$(l/\lambda)^2$级(可多取)	小粒子近似：只保留至$(l/\lambda)^2$级(可多取)

带电粒子受力计算（续）

$\beta = v/c$，$\delta = \tau_c / \tau_m$，

$$\frac{|\dot{\boldsymbol{v}}|R^*/c}{|\boldsymbol{v}|} \sim \frac{\tau_c}{\tau_m} \sim \delta, \quad \frac{|\ddot{\boldsymbol{v}}|R^{*2}/c^2}{|\boldsymbol{v}|} \sim \frac{\tau_c^2}{\tau_m^2} \sim \delta^2$$

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}'(t^*) = \boldsymbol{r}'\left(t - \frac{R^*}{c}\right) \approx \boldsymbol{r}'(t) - \frac{R^*}{c}\frac{d\boldsymbol{r}'(t)}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{R^*}{c}\right)^2 \frac{d^2\boldsymbol{r}'(t)}{dt^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{R^*}{c}\right)^3 \frac{d^3\boldsymbol{r}'(t)}{dt^3}$$

$$= \boldsymbol{r}'(t) - \frac{R^*}{c}\boldsymbol{v} + \frac{R^{*2}}{2c^2}\dot{\boldsymbol{v}} - \frac{R^{*3}}{6c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r}'(t) - \frac{R^*}{c}\left(\boldsymbol{v} - \frac{R^*}{2c}\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{R^{*2}}{6c^2}\ddot{\boldsymbol{v}}\right).$$

1. 上式右边括弧内 ~ β；后2项与第1项之比依次为 δ 的一级和二级小量
2. 在略去(β=v/c)二级小的前提下，可将上式中的 R^* 代之以 R：

$$R^* - R \sim (v/c)R \sim \beta R \quad \Longrightarrow \quad R^* = R + \mathrm{O}(\beta) \approx R$$

3. 从推迟势出发（$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \partial \boldsymbol{A}/\partial t$）也可导出粒子受力公式，参见：

Jackson, J. D., 1998, Classical Electrodynamics (3rd ed.), p.752-753.

a) 单位制：书中采用高斯单位制（其余部分为国际制），按国际制重新推导
b) 略去O[$(v/c)^2$]，与我们下面给出的推导的基本精神一致
c) 可计算至小参数δ的任意级别，但未区分固有场和辐射场的贡献

带电粒子受力计算（续）

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}'(t) - \frac{R^*}{c}\boldsymbol{v} + \frac{R^{*2}}{2c^2}\dot{\boldsymbol{v}} - \frac{R^{*3}}{6c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} \Rightarrow \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}' - \frac{R}{c}\boldsymbol{v} + \frac{R^2}{2c^2}\dot{\boldsymbol{v}} - \frac{R^3}{6c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} \quad (7.1.7)$$

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{R} + \frac{R}{c}\boldsymbol{v} - \frac{R^2}{2c^2}\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{R^3}{6c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} \quad (7.1.8)$$

$$R^* = (\boldsymbol{R}^* \cdot \boldsymbol{R}^*)^{1/2} = R\left(1 + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR} - \frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{2c^2} + \frac{R\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{6c^3}\right) \quad (7.1.9)$$

$$\frac{1}{R^{*3}} = \frac{1}{R^3}\left(1 - \frac{3\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR} + \frac{3\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{2c^2} - \frac{R\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{2c^3}\right) \quad (7.1.10)$$

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}\left(t - \frac{R^*}{c}\right) = \boldsymbol{v} - \frac{R}{c}\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{R^2}{2c^2}\ddot{\boldsymbol{v}} \quad (7.1.11) \qquad \dot{\boldsymbol{v}}^* = \dot{\boldsymbol{v}}\left(t - \frac{R^*}{c}\right) = \dot{\boldsymbol{v}} - \frac{R}{c}\ddot{\boldsymbol{v}} \quad (7.1.12)$$

$$\frac{1}{[1-(\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*/cR^*)]^3} = 1 + \frac{3\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*}{cR^*} = 1 + \frac{3\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}}{cR} = 1 + \frac{3\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR} - \frac{3\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{c^2} + \frac{3R\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{2c^3}$$

带电粒子受力计算（续）

$$\frac{1}{S^{*3}}=\frac{1}{R^{*3}[1-(\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{R}^*/cR^*)]^3}$$

$$=\frac{1}{R^3}\left(1-\frac{3\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR}+\frac{3\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{2c^2}-\frac{R\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{2c^3}\right)\times\left(1+\frac{3\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{cR}-\frac{3\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{c^2}+\frac{3R\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{2c^3}\right)=\frac{1}{R^3}\left(1-\frac{3\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{2c^2}+\frac{R\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{c^3}\right)$$

$$I_1\equiv\left(1-\frac{v^{*2}}{c^2}\right)\left(\boldsymbol{R}^*-\frac{R^*}{c}\boldsymbol{v}^*\right)=\boldsymbol{R}^*-\frac{R^*}{c}\boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{R}+\frac{R^2}{2c^2}\dot{\boldsymbol{v}}-\frac{R^3}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\qquad(7.1.14)$$

$$I_2\equiv\frac{\boldsymbol{R}^*}{c^2}\times\left[\left(\boldsymbol{R}^*-\frac{R^*}{c}\boldsymbol{v}^*\right)\times\dot{\boldsymbol{v}}^*\right]=\frac{\boldsymbol{R}}{c^2}\times(\boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{v}}^*)=\frac{\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{c^2}\boldsymbol{R}-\frac{R\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{c^3}\boldsymbol{R}-\frac{R^2}{c^2}\dot{\boldsymbol{v}}+\frac{R^3}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\qquad(7.1.15)$$

$$d\boldsymbol{E}_1=\frac{\rho' dV'}{4\pi\varepsilon_0 S^{*3}}I_1=\frac{\rho' dV'}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(1-\frac{3\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{2c^2}+\frac{R\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{R}}{c^3}\right)\left(\boldsymbol{R}+\frac{R^2}{2c^2}\dot{\boldsymbol{v}}-\frac{R^3}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}\right)$$

$$=\frac{\rho' dV'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{2c^2R}\cdot\left(\overleftrightarrow{I}-\frac{3\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}}{R^2}\right)-\frac{\ddot{\boldsymbol{v}}}{3c^3}\cdot\left(\overleftrightarrow{I}-\frac{3\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}}{R^2}\right)\right]$$

$$d\boldsymbol{E}=d\boldsymbol{E}_1+d\boldsymbol{E}_2$$

$d\boldsymbol{E}_1$：固有场；$d\boldsymbol{E}_2$：辐射场

$$d\boldsymbol{E}_2=\frac{\rho' dV'}{4\pi\varepsilon_0 S^{*3}}I_2=\frac{\rho' dV'}{4\pi\varepsilon_0 R^3}I_2=\frac{\rho' dV'}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2R}\cdot\left(\overleftrightarrow{I}-\frac{\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}}{R^2}\right)+\frac{\ddot{\boldsymbol{v}}}{c^3}\cdot\left(\overleftrightarrow{I}-\frac{\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}}{R^2}\right)\right]$$

带电粒子受力计算（续）

$$d\boldsymbol{E}_1=\frac{\rho' dV'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}+\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{2c^2R}\cdot\left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{3\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)-\frac{\ddot{\boldsymbol{v}}}{3c^3}\cdot\left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{3\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)\right]$$

$$d\boldsymbol{E}_2=\frac{\rho' dV'}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\dot{\boldsymbol{v}}}{c^2R}\cdot\left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)+\frac{\ddot{\boldsymbol{v}}}{c^3}\cdot\left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{F}_1=\iiint\rho dV\iiint d\boldsymbol{E}_1=0,\qquad \boldsymbol{F}_2=\iiint\rho dV\iiint d\boldsymbol{E}_2=-m_{\mathrm{em}}\dot{\boldsymbol{v}}+\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}$$

证明过程中用到的恒等式：

$$\iiint\iiint\rho\rho' dVdV'=e^2,\quad \iiint\iiint\frac{\rho\rho'}{R}dVdV'=8\pi\varepsilon_0W_0,\quad \iiint\iiint\frac{\rho\rho'}{R^3}\boldsymbol{R}dVdV'=0$$

$$\boxed{\iiint\iiint\frac{\rho\rho'\boldsymbol{RR}}{R^n}dVdV'=\frac{1}{3}\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\iiint\iiint\frac{\rho\rho'}{R^{n-2}}dVdV'},\quad \iiint\iiint\frac{\rho\rho'}{R^n}\left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{3\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)dVdV'=0$$

$\boldsymbol{RR}=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 中，仅对角项 $(x-x')^2\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x,\ (y-y')^2\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y,\ (z-z')^2\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z$ 对积分有贡献，总贡献等于 $R^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}/3$ 的贡献

结论：$\boldsymbol{F}_1=0$

在F_2的推导中用到：$$\boxed{\iiint\iiint\frac{\rho\rho'}{R^n}\left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)dVdV'=\frac{2}{3}\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\iiint\iiint\frac{\rho\rho'}{R^n}dVdV'}$$

带电粒子受力计算（续）

$$\boldsymbol{F}=\iiint \rho \boldsymbol{E} dV \qquad (7.1.2)$$

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2 \qquad \begin{cases} \boldsymbol{F}_1=\iiint \rho dV \iiint d\boldsymbol{E}_1\text{：固有场对粒子的作用力} \\ \boldsymbol{F}_2=\iiint \rho dV \iiint d\boldsymbol{E}_2\text{：辐射场对粒子的作用力} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F}_1=0, \qquad \boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_2=-m_{\text{em}}\dot{\boldsymbol{v}}+\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} \qquad (7.1.26)$$

$$m_{\text{em}}=\frac{4W_0}{3c^2} \qquad (7.1.27)$$

结论：

1. 对粒子的力全部来自辐射场，固有场对粒子的合力为零；
2. “惯性力”对应的等效电磁质量为(W_0/c^2) 的4/3 倍；
3. 辐射阻尼力与按辐射能－机械能守恒定理推出的结果一致，但此地为瞬时值而非平均值，也不要求粒子作周期运动；
4. 为加深对惯性力和辐射阻尼力物理本质的理解，有必要作能量分析。

三　能量分析

外界克服自身场对粒子的电力所做的功(损失机械能) = 电磁能的增量+辐射能：

$$-\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dt=\frac{1}{2}m_{\text{em}}v^2\Big|_{t_1}^{t_2}-\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}Pdt,\qquad P=\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}$$

第3项为辐射能，前两项的物理含义如何？

推测：前两项应与粒子激发的电磁场的电磁能的增量有关

分析：限于匀速运动电荷的固有场电磁能(回避辐射场引入的复杂性)

$$\boxed{d\boldsymbol{E}=\frac{(1-\beta^2)\boldsymbol{R}\rho'dV'}{4\pi\varepsilon_0r^3(1-\beta^2+(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R})^2/R^2)^{3/2}}}$$

对小参数$\beta(=v/c)$作泰勒展开：

$$\frac{1-\beta^2}{[1-\beta^2+(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R})^2/R^2]^{3/2}}\approx1+\frac{\beta^2}{2}-\frac{3(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R})^2}{2R^2}+O(\beta^4)$$

$$d\boldsymbol{E}=d\boldsymbol{E}_0+d\boldsymbol{E}_2,\qquad d\boldsymbol{E}_0=\frac{\rho'\mathrm{R}dV'}{4\pi\varepsilon_0R^3},\qquad d\boldsymbol{E}_2=-\frac{\rho'\boldsymbol{R}dV'}{8\pi\varepsilon_0R^3}\boldsymbol{\beta\beta}:(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{3\boldsymbol{RR}}{R^2})$$

（一级小量＝0）　　零级量　　二级小量

匀速运动电荷的能量分析（续）

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_2$$

$$d\boldsymbol{E}_0=\frac{\rho' \boldsymbol{R} dV'}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \Rightarrow \boldsymbol{E}_0=\int d\boldsymbol{E}_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho'\boldsymbol{R}dV'}{R^3}=f(r)\boldsymbol{r}$$

$$d\boldsymbol{E}_2=-\frac{\rho'\boldsymbol{R}dV'}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{\beta\beta}:(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{3\boldsymbol{RR}}{R^2}) \Rightarrow \boldsymbol{E}_2=\int d\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho'\boldsymbol{R}}{R^3}\boldsymbol{\beta\beta}:(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{3\boldsymbol{RR}}{R^2})dV'$$

1. 电能： $W=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint E^2dV=W_0+W_2+O(\beta^4)$, $\quad W_0=\frac{\varepsilon_0}{2}\iiint E_0^2dV$

$$W_2=\varepsilon_0\iiint\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_2dV=\frac{\boldsymbol{\beta\beta}}{8\pi}:\iiint\iiint\frac{\rho' f(r)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{R}}{R^3}\left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\frac{3\boldsymbol{RR}}{R^2}\right)dVdV'=0$$

结论：在略去β^4小量的前提下，匀速运动电荷的电能等于静止电荷的静电能

2. 磁能： $\boxed{(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}_0)\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}_0)=\boldsymbol{v}\cdot[\boldsymbol{E}_0\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}_0)]=\boldsymbol{v}\cdot[\boldsymbol{v}E_0^2-\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_0)]=v^2E_0^2-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_0)^2}$

$$W_m=\frac{1}{2\mu_0}\iiint B^2dV=\frac{\varepsilon_0}{2c^2}\iiint(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}_0)^2dV \qquad \boxed{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_0)^2=\boldsymbol{vv}:\boldsymbol{EE}}$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2c^2}\iiint[v^2E_0^2-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_0)^2]dV=\frac{v^2W_0}{c^2}-\frac{\varepsilon_0}{2c^2}\boldsymbol{vv}:\iiint\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_0dV+O(\beta^4)$$

匀速运动电荷的磁能（续）

$$W_m = \frac{v^2 W_0}{c^2} - \frac{\varepsilon_0}{2c^2}\boldsymbol{vv} : \iiint \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_0 dV + O(\beta^4), \qquad \boldsymbol{E}_0 = f(r)\boldsymbol{r}$$

$$-\frac{\varepsilon_0}{2c^2}\boldsymbol{vv} : \iiint \boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_0 dV = -\frac{\varepsilon_0}{2c^2}\boldsymbol{vv} : \iiint f^2(x^2\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + y^2\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y + z^2\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z)dV$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{6c^2}\boldsymbol{vv} : \iiint f^2 r^2(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z)dV = -\frac{\varepsilon_0}{6c^2}\boldsymbol{vv} : \vec{\boldsymbol{I}} \iiint E_0^2 dV = -\frac{v^2 W_0}{3c^2}$$

$$\Rightarrow \quad W_m = \frac{2v^2 W_0}{3c^2} = \frac{1}{2} m_{\text{em}} v^2 \qquad (7.1.35)$$

对比：

$$-\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}dt = \frac{1}{2}m_{\text{em}}v^2\Big|_{t_1}^{t_2} \boxed{-\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})\Big|_{t_1}^{t_2}} + \int_{t_1}^{t_2} P dt \qquad (7.1.28)$$

结论：

1. 当粒子从一个匀速运动状态进入另一个匀速运动状态，外界克服辐射场对粒子的惯性力做功，转换为磁能；对其他情形，**(7.1.35)**构成系统磁能主项，上述结论近似成立（当β << 1，τ_c / τ_m << 1 ）
2. 式(7.1.28)第二项表示电磁能增量；对匀加速运动粒子，辐射阻尼力为零，即后两项代数和为零，辐射能由系统电磁能提供

四 电磁质量

- 定义： $\boldsymbol{F}_{惯性力} = -m_{em}\dot{\boldsymbol{v}}$, $m_{em} = \dfrac{4W_0}{3c^2}$
- 理解：

➢ 对应的惯性力来自辐射场，而非固有场；

➢ 从电磁理论角度，将电磁质量视为一个等效参数更为恰当，通过它将带电粒子的固有场磁能与粒子的附加动能相对应；

➢ 因此，没有必要将电磁质量与爱因斯坦质能关系相联系；对于由后者推测的$m_{em} = W_0/c^2$相差因子4/3的问题，也不必过于认真。

- 经典电磁理论的困难：设电子为半径r_0的球,电荷分布于球表面：

$$W_0 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0} \Rightarrow m_{em} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 r_0 c^2} = \frac{2r_e}{3r_0}m, \quad r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = 2.82\times 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

当$r_0 < 2r_e/3$时，导致$m_{em} > m$；实验表明,直到10^{-18} m电子仍像点粒子!经典电磁理论按估算电子“惯性”过大，即算得的电子固有场不正确（而远处辐射场却仍然正确！）。

- 惯性力的处理：假定电子实测质量已包含电磁质量，不另外考虑

五　辐射阻尼

- 辐射阻尼力：

$$\boldsymbol{F}_R = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} = m\tau\ddot{\boldsymbol{v}} \tag{7.1.38}$$

$$\tau = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 m c^3} = \frac{2r_e}{3c} = 6.3\times10^{-24}\text{ s} \tag{7.1.39}$$

τ 与前面提到过的时间尺度 $\tau_c = R/c$ 相当（$R \sim r_e$）

- 辐射阻尼力做功与辐射功率的关系：

$$-\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_R\cdot\boldsymbol{v}dt = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}Pdt \tag{7.1.40}$$

➢ 辐射阻尼力对粒子做的负功功率一般不等于辐射功率；
外界克服辐射阻尼力做功＝粒子电磁场的电磁能增量＋辐射能

➢ 在下列情况下，辐射阻尼力对粒子做的负功功率等于辐射功率：

1. 粒子作匀速圆周运动，速度恰好与加速度垂直；
2. 粒子作周期运动，周期＝$t_2 - t_1$（本章限于这种情况）；
3. 在 t_1 之前和 t_2 之后，粒子作匀速直线运动

➢ 辐射阻尼力公式(7.1.38)时刻成立, 并非对周期运动粒子的平均效应

六 辐射阻尼力公式的修正

- 带电粒子运动方程的动力学困难：

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F} + m\tau\ddot{\boldsymbol{v}} \quad (7.1.42) \Longrightarrow m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} + m\tau\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}$$

为粒子位置矢量的三阶常微分方程，除粒子的初始位置和初始速度之外，还要求给定粒子的初始加速度！

- 如何理解和解决这一困难？

1. 作为泰勒展开的“数学”结果，物理上反映了电磁作用的传播推迟效应；
2. 将出现的加速度微商与力的“随体”变化相联系：

$$m\dot{\boldsymbol{v}} \approx \boldsymbol{F} \Longrightarrow \boldsymbol{F}_R = m\tau\ddot{\boldsymbol{v}} \approx \tau\dot{\boldsymbol{F}} = \tau\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{F}\right) \Longrightarrow m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F} + \tau\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{F}\right) \quad (7.1.44)$$

- 方程(7.1.42)和(7.1.44)的等效性（略去τ^2小量）

以时谐力场中的电子的简谐运动为例说明这一等效性：

$$\boldsymbol{r},\boldsymbol{F} \sim e^{-i\omega t}: \quad (7.1.42) \Rightarrow -m\omega^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} + i\omega^3 m\tau\,\boldsymbol{r} \Rightarrow -m\omega^2(1+i\omega\tau)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}$$

$$(7.1.44) \Rightarrow -m\omega^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}(1-i\omega\tau) \Rightarrow -m\omega^2(1+i\omega\tau)\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{F}$$

- 建议：对电子的简谐运动，使用方程(7.1.42)较为简便

7.2 介质对电磁波的散射

基本假定：只考虑外电磁场对粒子的作用，忽略粒子对外场的反作用

问题实质：分析给定外电磁场中粒子的运动，计算运动粒子的辐射

一 散射的定义

在透明介质中, 电子吸收入射电磁波的能量, 向各个方向发出次波, 称为散射. 例如地球大气和太阳大气对阳光的散射

二 自由电子对电磁波的散射

- 补充假定：

1. 完全或部分电离气体，只考虑自由电子的运动（高频近似）
2. 气体足够稀薄, 忽略电子与电子之间, 以及电子与其它粒子之间的相互作用
3. 电子的空间位置和周期运动的初始相位随机分布, 可以在处理单个电子运动的基础上, 将它们发出的散射波的功率进行简单叠加
4. 电子运动速度远小于光速, 可以采用低速运动近似：
   - ➢ 电磁波作用在电子上的电力远大于磁力，可略去磁力；
   - ➢ 电子运动尺度远小于波长, 可视外电磁波的电场为均匀场；
   - ➢ 可使用低速运动电荷近似计算电子的辐射功率.
5. 忽略对自由电子的辐射阻尼力

- 电子运动方程及求解：

$$\ddot{\xi} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad (7.2.1)$$

ξ ：电子相对平衡位置的位移

e：电子电量(负值），m：电子质量

$\boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}$：外电磁波电场，近似视$\boldsymbol{E}_0$为常量

求强迫振荡解：$\xi = \xi_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}$ (7.2.2)　　$\xi_0 = -\dfrac{e\boldsymbol{E}_0}{m\omega^2}$ (7.2.3)

$$\Rightarrow \xi = -\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t} \qquad (7.2.4)$$

- 散射功率和散射界面（使用低速运动近似计算辐射功率，见6.4节）：

$$\ddot{\boldsymbol{p}} = e\ddot{\xi} = \frac{e^2\boldsymbol{E}_0}{m} e^{-i\omega t}$$

代入电偶极辐射公式：$\dfrac{dP}{d\Omega} = \dfrac{|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin^2\alpha$，$P = \dfrac{|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$

α：考察方向与E的夹角

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 m^2 c^3}\sin^2\alpha = r_e^2 I_0 \sin^2\alpha,\quad P = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 I_0 \qquad (7.2.9)$$

电子（汤姆孙）散射截面：$\sigma = \dfrac{P}{I_0} = \dfrac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.67\times 10^{-25}\ \mathrm{m}^2$

$\boxed{I_0 = \varepsilon_0 E_0^2 c/2}$ 入射波强度

- 对自然光的散射

$$\frac{dP}{d\Omega}=r_e^2 I_0 \sin^2\alpha$$

α 为电偶极矩 (即$\boldsymbol{E}_0$) 与考察方向 (即$\boldsymbol{r}$) 的夹角

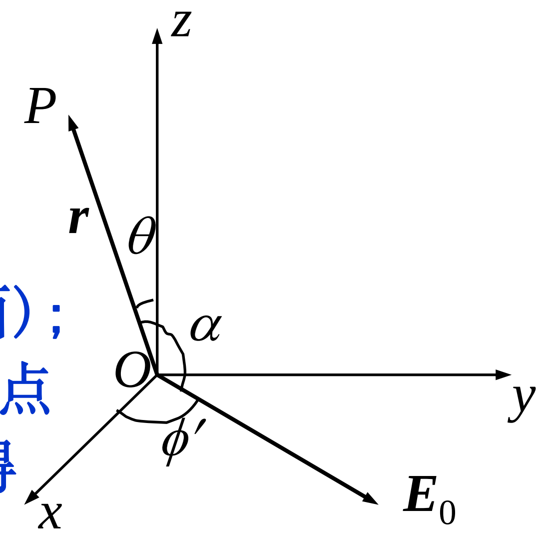

图7—2

不妨设入射波沿 z 轴正向传播($\boldsymbol{E}_0$位于x–y 平面)；合成辐射场将相对 z 轴对称，因此不妨取考察点 P 位于x–z 平面（技巧），由简单的几何分析得

$$\cos\alpha=\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{e}_r/E_0=(\cos\phi'\,\boldsymbol{e}_x+\sin\phi'\,\boldsymbol{e}_y)\cdot(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x+\cos\theta\,\boldsymbol{e}_z)$$

$$=\sin\theta\cos\phi',$$

$$\sin^2\alpha=1-\sin^2\theta\cos^2\phi'. \Rightarrow \overline{\sin^2\alpha}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta\cos^2\phi')d\phi'=\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow \overline{\frac{dP}{d\Omega}}=I_0 r_e^2\,\overline{\sin^2\alpha}=\frac{I_0 r_e^2}{2}(1+\cos^2\theta) \qquad (7.2.11)$$

微分散射截面：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{I_0}\overline{\frac{dP}{d\Omega}}=\frac{r_e^2}{2}(1+\cos^2\theta) \qquad (7.2.12)$$

将微分散射截面对立体角积分得汤姆孙散射截面： $\sigma=8\pi r_e^2/3$

对自然光的散射（续）

对结果的物理分析：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{I_0}\frac{\overline{dP}}{d\Omega}=\frac{r_e^2}{2}(1+\cos^2\theta),\qquad \sigma=\frac{8\pi r_e^2}{3}$$

1. 散射波频率与入射波相同，强度（散射截面）与频率无关；
2. 散射波强度角分布前后对称，平行方向（$\theta=0,\pi$）最强，垂直方向（$\theta=\pi/2$）最弱

- **X 射线的康普顿散射（康普顿，吴有训，1922）**

1. 散射波波长λ'相对入射波波长λ发生偏移，与散射波方向有关：

$$\lambda'-\lambda=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)=0.02423(1-\cos\theta)\quad \text{Å}$$

2. 散射波强度失去前后对称性：前方强度同汤姆孙散射,后方强度变弱

说明：1. 康普顿效应只能用量子理论来解释；

2. 当光子能量远低于电子静能即 $h\nu<<mc^2$ 时，经典理论适用

三 束缚电子对电磁波的散射

- 补充假定：

1. 中性气体，只考虑原子或分子内束缚电子的运动
2. 电子受到原子或分子内部的约束力，设为指向原子或分子中心的简谐力
3. 不同电子的空间位置和初始相位随机分布，可以在处理单个电子运动的基础上，将它们发出的散射波的功率进行简单叠加
4. 电子运动速度远小于光速，可以采用低速运动近似：

➢ 电磁波作用在电子上的电力远大于磁力，可略去磁力；
➢ 电子运动尺度远小于波长，可视外电磁波的电场为均匀场；
➢ 可使用低速运动电荷近似计算电子的辐射功率.

5. 计入对束缚电子的辐射阻尼力

- 电子运动方程及求解：

$$\boxed{\ddot{\xi} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} - \omega_0^2\xi + \tau\dddot{\xi}} \qquad (7.2.14)$$

$-\omega_0^2\xi$：简谐力（谐振子模型）

ω_0：振子固有频率

$$\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t},$$

$$\gamma = \omega^2\tau = \frac{e^2\omega^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}$$

阻尼系数

强迫振荡解：$\xi = \xi_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}$

电子运动方程及求解（续）

$$\ddot{\xi}+\gamma\dot{\xi}+\omega_0^2\xi=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad (7.2.15)$$

$$\xi=\frac{e\boldsymbol{E}_0}{m(\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\,\omega\gamma)}e^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad (7.2.17)$$

- 散射功率和散射截面（使用低速运动近似计算辐射功率）：

$$\ddot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{e}\ddot{\xi}=-\frac{e^2\omega^2\boldsymbol{E}_0}{m}\frac{e^{-\mathrm{i}(\omega t-\delta)}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}} \qquad (7.2.18) \qquad \tan\delta=\frac{\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad (7.2.19)$$

代入

$$P=\frac{|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \Rightarrow P=\frac{8\pi}{3}r_e^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}I_0 \qquad (7.2.20)$$

$$\sigma=\frac{P}{I_0}=\frac{8\pi}{3}r_e^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \qquad (7.2.21)$$

$$\sigma = \frac{P}{I_0} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \tag{7.2.21}$$

- 物理分析：

1. 散射波频率同入射波频率，散射截面与频率有关
2. 当入射波频率远高于振子固有频率ω_0时，回到汤姆孙散射结果
3. 当ω << ω_0 时：

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \quad \text{瑞利散射截面} \tag{7.2.22}$$

   - 天空呈蔚蓝色：地球大气对蓝光（可见光高频波段）散射强；
   - 夕阳呈橙红色：地球大气对红光（可见光低频波段）吸收弱

4. 共振散射（$\omega = \omega_0$）

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2_{\omega=\omega_0} = \frac{8\pi r_e^2}{3\omega_0^2\tau^2} \tag{7.2.23}$$

   - 一般$\omega_0\tau$ << 1，散射极强，称为共振散射；
   - 此时辐射阻尼（或其它阻尼）起着关键作用，不能忽略

内容：考虑介质与电磁波的相互作用
方法：联立求解电子运动方程和麦克斯韦方程（时谐简化）

一　物理模型

- 粒子运动部分

1. 只考虑电子运动，其数密度均匀（介质均匀，电中性）
2. 满足牛顿定律（低速运动电子：$v << c$）

- 粒子相互作用部分

1. 忽略近距作用（直接碰撞）
2. 考虑远距集体相互作用，该作用由全部带电粒子的电磁场（“自洽场”）决定

- 电磁场部分

1. 由外场和自洽场（来自介质场源）叠加而成
2. 满足麦克斯韦方程
3. 介质场源：引入电极化强度$\boldsymbol{P}$（类似静电场的处理方法）

$\rho' = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$，　$\boldsymbol{j}' = \partial\boldsymbol{P}/\partial t$，自动满足电荷守恒方程：　$\partial\rho'/\partial t + \nabla\cdot\boldsymbol{j}' = 0$

7.3 介质对电磁波的色散和吸收

- 问题：介质引入的附加场源能用极化强度$\boldsymbol{P}$代表吗？为何不同时或另外引入自由电荷、传导电流 ($\boldsymbol{j}_0 = \sigma \boldsymbol{E}$) 和磁化电流 ($\boldsymbol{j}' = \nabla \times \boldsymbol{M}$)？
- 回答：

1. 各类场源在激发电磁场和受电磁场作用方面完全等效
2. 简单介质：导体、电介质和磁介质

a) 将电荷划分为“自由”和“束缚”，便于处理导体和电介质中的电荷分布
b) 将电流划分为“传导”和“束缚”（磁化电流），便于处理导体和磁介质中的电流分布
c) 对于时变电磁场，上述划分给简单介质场源处理的方便仍在，可继续维持（例如前两章对简单介质中电磁波的传播和辐射的处理）

3. 一般介质中的电荷和电流

a) 上述划分失去实用价值，电荷和电流由介质微观模型算出
b) 两种观点：
➢ 视介质为“导体”，视场源为自由电荷和传导电流，用广义欧姆定律表述
➢ 视介质为“电介质”，视场源为束缚电荷和束缚电流，用极化规律表述
c) 不可同时视为导体和电介质，否则导致场源的重复计算（加倍）
d) 多数人将一般介质视为“电介质”（为何不视为“磁介质”？）