



第二章 静电场中的导体和电介质

§ 2.1 物质的电性质

§ 2.2 静电场中的导体

§ 2.3 电容与电容器

§ 2.4 电介质

§ 2.5 极化强度矢量 $\mathbf{P}$

§ 2.6 电介质中静电场的基本定理

§ 2.7 边值关系和唯一性定理

* § 2.8 电像法

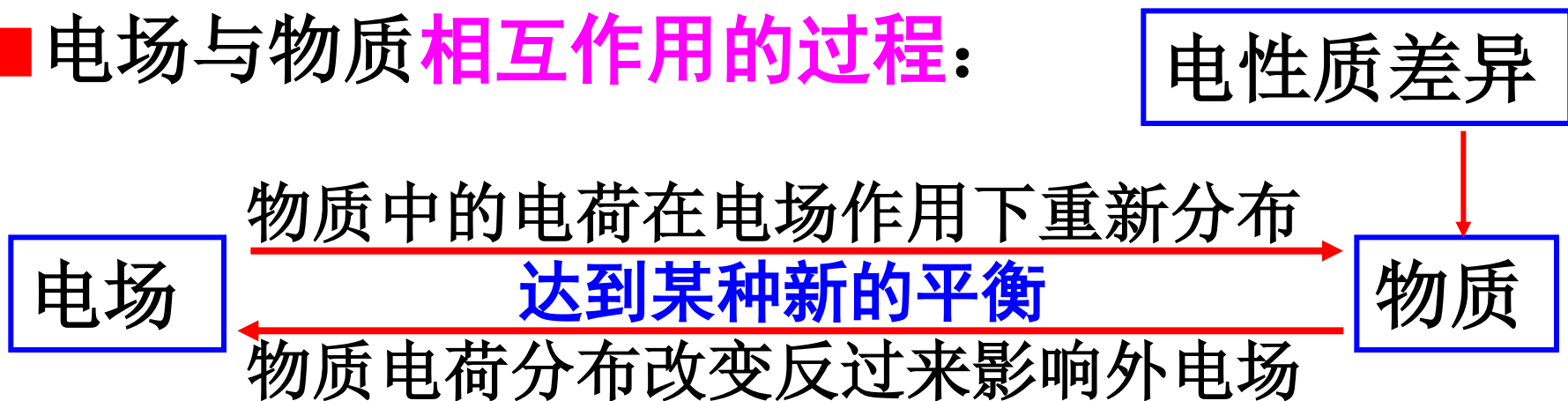
关键是静电场与物质的相互作用

■ 物质存在形式：

- 由基本粒子乃至原子、分子构成的实体存在形式
- 以场的形式存在，如电场，具有能量，能量交换
- 物质的**实体**与**场**是物质存在的**两种基本形式**。

■ 物质（以下指实体）的**结构**：是**复杂的电荷系统**，由原子/分子/离子构成。

■ 电场与物质**相互作用的过程**：



§ 2.1 物质的电性质

1、物质的电性质（回忆与讨论）

按照电荷在物质中移动的难易程度，将物质分为：

- **导体(conductor)** 电阻率 $10^{-8} - 10^{-6} \Omega \cdot m$
 - 导电能力极强的物体
 - 常见的导体有金属、电解质水溶液、电离气体等
 - 导体中存在着大量的自由电子，数密度约为 $n_e \sim 10^{22} / \text{cm}^3$
- **绝缘体(电介质, dielectric)** 电阻率 $10^{6-18} \Omega \cdot m$
 - 导电能力极弱或不能导电的物体
 - 绝缘体有固态、液态和气态。如橡胶、陶瓷、塑料等

- 固态绝缘体中又分为非晶态（如塑料）和晶态（如云母）两类

■ 半导体(semiconductor) 电阻率 $10^{-6} - 10^6 \Omega \cdot m$

- 导电能力介于导体和绝缘体之间；自由电子
 $n_e \sim 10^{16} / \text{cm}^3$
- 如硅、锗、硒等，半导体的电阻率随温度不同而明显变化

■ 超导体(superconductor)

某些物质当温度降低到某一温度 T_c 时，它的电阻率会几乎突然地消失。这种现象称为超导电性，这类物质称为超导体，温度 T_c 就叫做超导体的临界温度。

不同的超导体具有不同的临界温度。迄今我们知道大约有20多种元素，几百种合金和金属化合物是超导体，它们的临界温度的范围从 $0.12\text{K} \sim 150\text{K}$ （如钇钡铜氧化合物）。

物质导电取决于有载流子！

载流子——可以自由移动的带电物质微粒。

- 金属导体：原子最外层的价电子, 自由电子
- 电解质：载流子是正、负离子
- 电离气体：载流子是电子和正、负离子
- 绝缘材料：只有微量自由电子、本征离子、杂质离子
- 半导体：载流子为
 - n型**半导体中的自由电子；
 - p型**半导体中的空穴
- 超导体：载流子为电子对，又称库珀对

2、电场对物质（电荷系统）的作用

■ 电场对物质作用  电场对物质内部电荷的作用

■ 外场对物质作用力：

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{F} = \iiint_V \rho_e \mathbf{E} dV; \quad \mathbf{F} = \iint_S \sigma_e \mathbf{E} dS; \quad \mathbf{F} = \int_L \lambda_e \mathbf{E} dl. \quad (2.1.2)$$

注意！

■ 电场 $\mathbf{E}$ 为外场，即施力带电体产生的电场，不应包括受力带电体的电场；

■ 受力带电体已经**不限于试探电荷**，所以受力带电体对施力电荷的分布，即对施力带电体的电场存在影响；

■ $\mathbf{E}$ 是经过受力带电体影响之后的施力带电体的电场。

■ $\therefore E = E_t - E_1$ (2.1.3)

- E_t 施力和受力带电体的总电场
- E_1 为受力带电体产生的电场
- E 为施力带电体的电场，即外场

■ 讨论

- 实际问题中， E_t 常易于求得，只要求得 E_1 ，可得 E 。对体电荷和面电荷受力带电体这两种情况，我们只要从中分别减去体电荷元和面电荷元的贡献即可。
- 这样做的后果是将受力带电体各部分的内力也计入到总力 F 之中。幸运的是，由于内力相互抵消。

因为：

- 体电荷： $E_1(r) = \rho_e r / (3\varepsilon_0)$, $r \rightarrow 0 \Rightarrow E_1 \rightarrow 0$
- 面电荷： $E_1 = \pm \sigma_e / (2\varepsilon_0)$ （见下面例**2.1**）
- 线电荷： $E_1 = \lambda_e / 2\pi\varepsilon_0 r$, $r \rightarrow 0 \Rightarrow E_1 \rightarrow \infty$

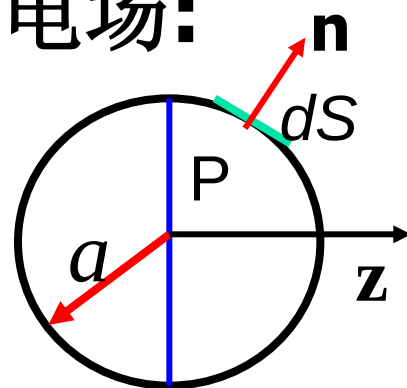
所以：

- 对受力带电体的情况： $E = E_t$ ；
- 受力带电面的： $E = E_t - E_1$ ；
- 对线电荷： 不能利用 $E = E_t - E_1$

[例2.1] 将一带电量为 Q 、半径为 a 的均匀带电球面切成两半，求两半球面间的静电力。

[解] ■ 由高斯定理求得球面两侧的总电场：

$$E_t = \begin{cases} \sigma_e / \varepsilon_0, & (r = a + 0); \\ 0, & (r = a - 0); \end{cases}$$



式中 $\sigma_e = Q / (4\pi a^2)$ 。

■ 由受作用面元在自身两侧产生的电场为：

$$E_1 = \begin{cases} \sigma_e / (2\varepsilon_0), & (r = a + 0); \\ -\sigma_e / (2\varepsilon_0), & (r = a - 0). \end{cases}$$

■ 电场径向分

量：

$$E = E_t - E_1 = \sigma_e / (2\varepsilon_0) \quad (r = a)$$

■取球坐标，使 z 轴与切割面垂直，则有：

$$\mathbf{E} = \sigma_e \hat{r} / (2\varepsilon_0)$$

代入式（2.1.2）求得两半球面之间的静电力为

$$\mathbf{F} = \iint_s \sigma_e \mathbf{E} dS = \iint_s \frac{\sigma_e^2}{2\varepsilon_0} \hat{r} dS$$

■由对称性分析可知，上述作用力只有 z 分量：

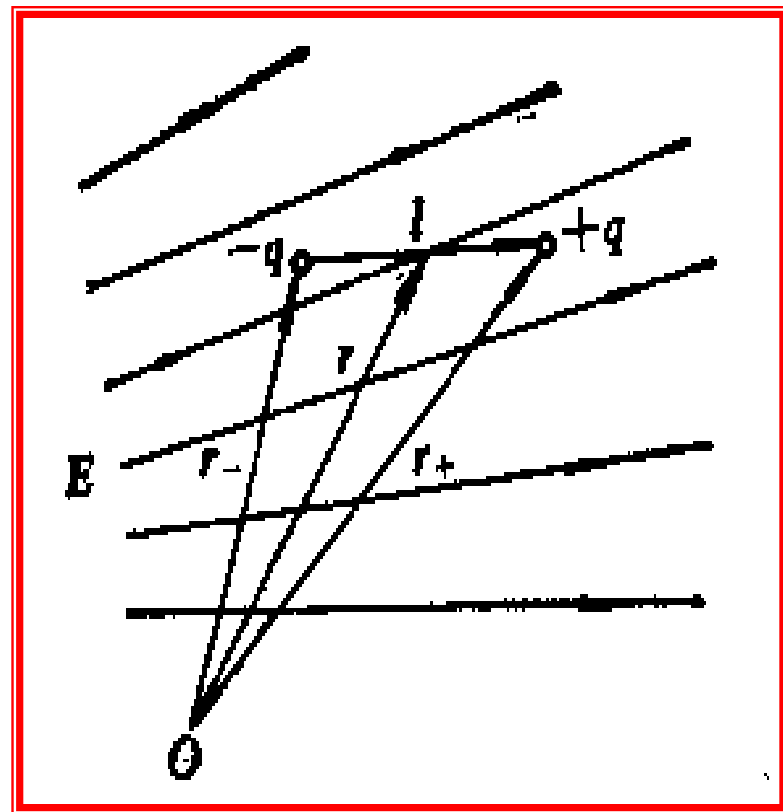
$$F = F_z = \frac{a^2 \sigma_e^2}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi a^2 \sigma_e^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}$$

该力为正，表明两半球间的静电力为排斥力。

[例2.2] 右下图所示的电偶极子由一对相距为 l 的等量异号电荷 $\pm q$ 构成，两个电荷的位置分别为 $\mathbf{r}_{\pm}$ ，相应电偶极矩为 $\mathbf{p} = ql = q(\mathbf{r}_{+} - \mathbf{r}_{-})$ 。求该电偶极子在外场 $\mathbf{E}$ 中所受的力 $\mathbf{F}$ 及所受的力矩 $\mathbf{L}$ 。

[解] 设在 $\mathbf{r}_{-}$ 与 $\mathbf{r}_{+}$ 处的外电场强度分别为 $\mathbf{E}_1$ 和 $\mathbf{E}_2$ ，则有

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_2 - q\mathbf{E}_1 = q\mathbf{E}(\mathbf{r}_{+}) - q\mathbf{E}(\mathbf{r}_{-}).$$



■ 设 $\mathbf{r}$ 为原点到电偶极子中点的矢径，且 $l \ll r$ ，
则由**泰勒展开**取头两项得

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}/2) - \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{l}/2)] \approx q(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

即
$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.1.4)$$

■ 在外电场中受的**力矩** $\mathbf{L}$ （以电偶极子中点为参考点）：

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}) \times q\mathbf{E}_2 - (\mathbf{r}_- - \mathbf{r}) \times q\mathbf{E}_1 \approx q\mathbf{l} \times \mathbf{E}$$

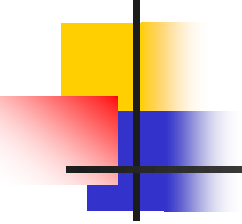
即
$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (2.1.5)$$

在推导中，似近取： $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$ 。

§ 2.2 静电场中的导体

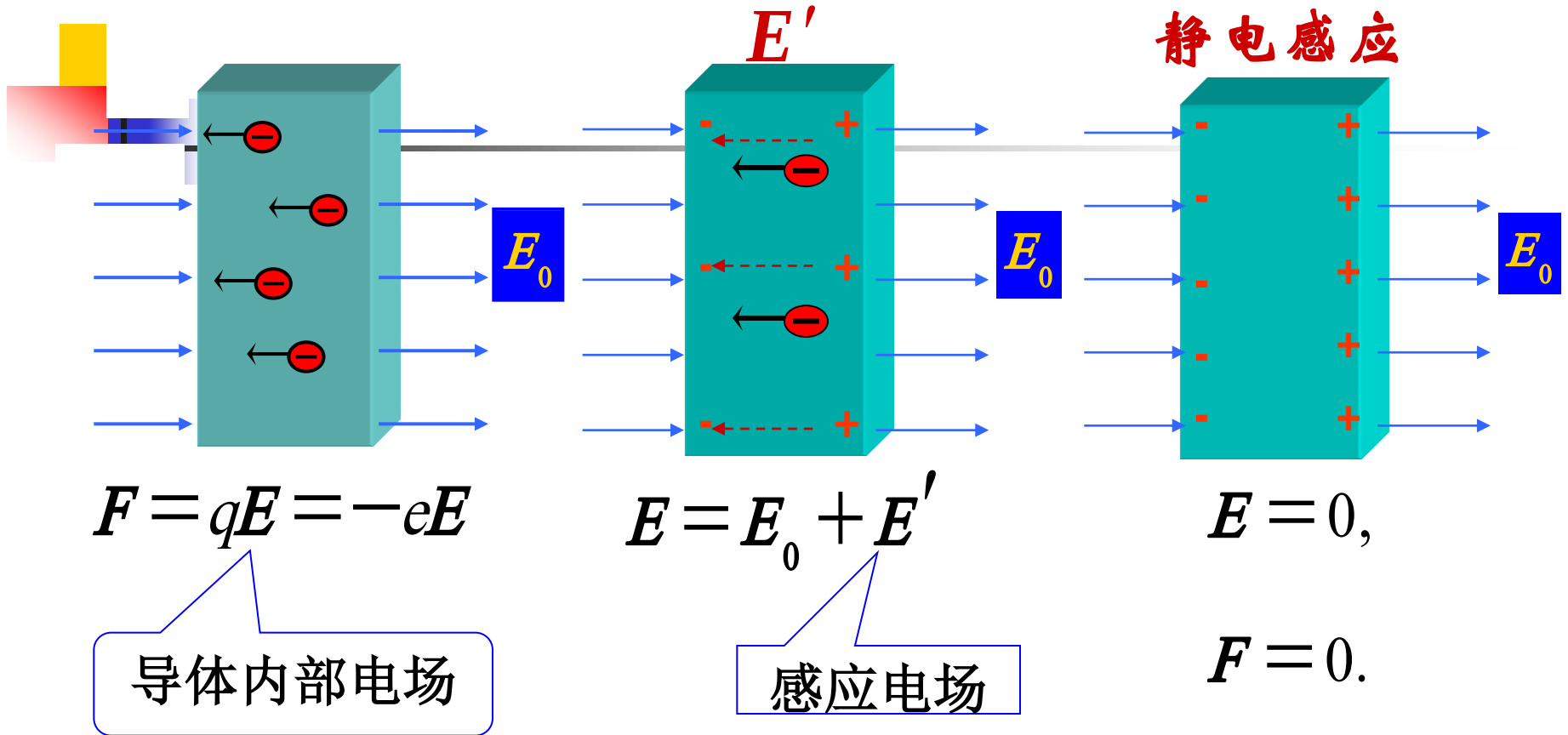
1. 导体达到静电平衡的条件

- 导体的特点是体内有自由的载流子，静电场会改变导体内电荷的分布 → 电荷分布的改变将影响电场的分布 → 使得导体内电场强度处处为零，则自由电荷不再运动 → 我们说导体达到静电平衡。
- 这时导体内自由电荷分布以及导体内、外的电场分布不再随时间变化。这个过程进行得很快，大约在 $10^{-8} - 10^{-10}$ s 就完成了。

- 
-
- 对于**不存在非静电力**情况下的均匀、各向同性导体，达到**静电平衡的条件**是**导体内部电场强度处处为零**。

以上所采用的是**演绎法**！即从基本定律出发，通过逻辑推理，得到**导体**达到静电平衡的条件。

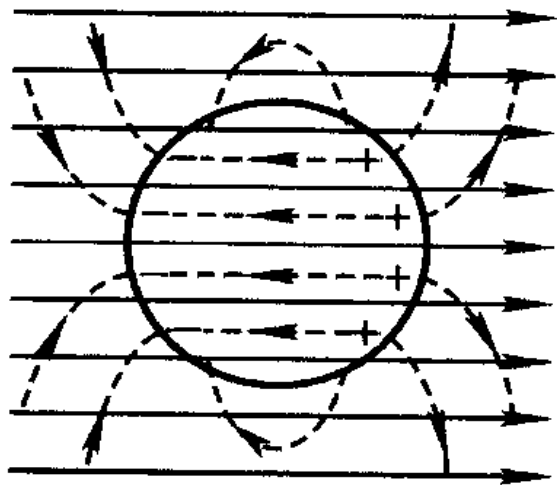
导体的静电平衡条件



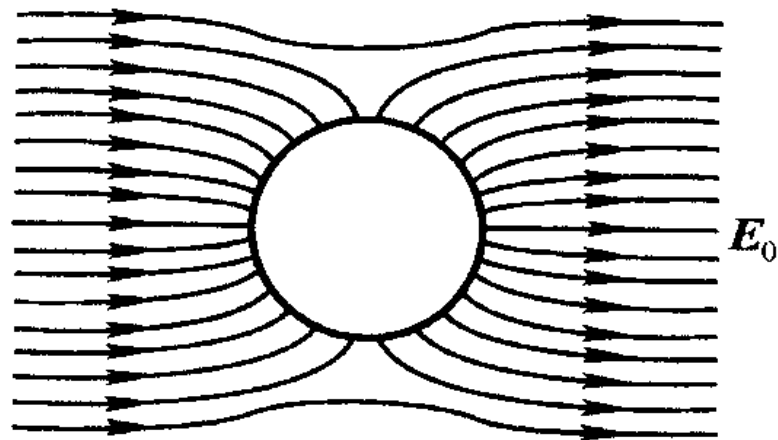
导体刚放入匀
强电场中

只要E不为零，自
由电子作定向运动

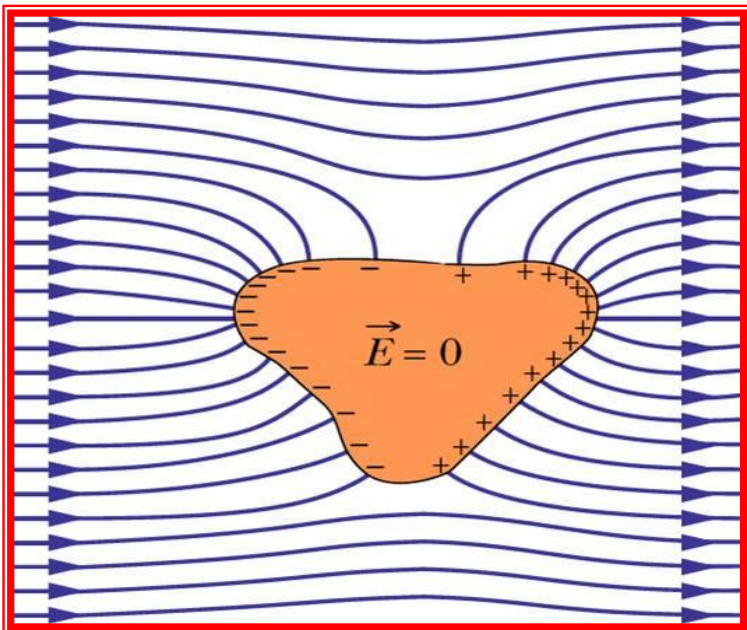
改变电荷分布，
产生附加场 E'



(a) 感应电荷在球内的场强与外场源
在球内的场强大小相等方向相反



(b) 合电场的电场线



(c)

静电场中的导体球内
部和周围的电场分布

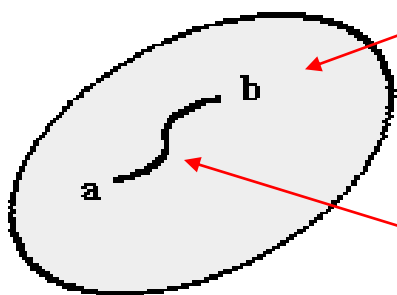
2. 处在静电平衡条件下导体的性质

(1) 内部电场

导体内部电场 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = 0$ (静电平衡条件)

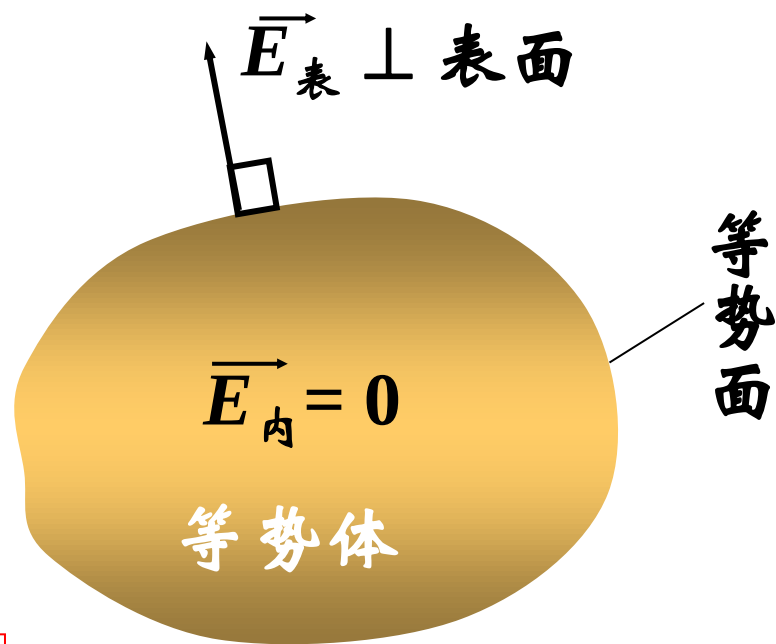
(2) 电势分布

导体内部任意两点间电势差为零 $\rightarrow$ 各点等电势 $\rightarrow$ 导体为等势体 $\rightarrow$ 表面为等势面



导体内部 $E=0$

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



静电平衡时的导体

(3) 整体电荷分布

实心导体： ■ 当带电导体处于静电平衡状态时，**导体内部处处没有净电荷存在**，电荷密度处处为零 $\rho_e = 0$ 。

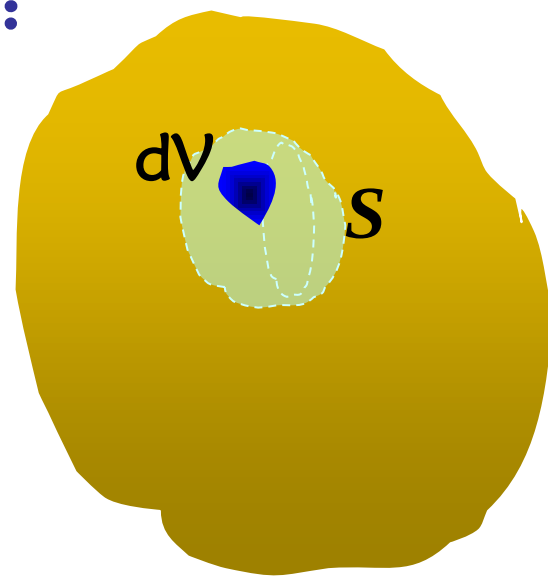
■ **电荷只分布在导体表面**。导体表面电荷的电荷层一般只有**1至2**个原子的厚度。

【证明】：在导体内任取体积元 dV ，再取任一闭合曲面 S 包围它，**由高斯定理：**

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i,$$

$$\because \vec{E} = 0, \quad \therefore \sum_i q_i = \iiint_V \rho_e dV = 0.$$

$$\because \text{体积元 } dV \text{ 任取, 即 } V \text{ 任取} \quad \therefore \rho_e = 0.$$



导体空腔（腔内没有带电体情况）

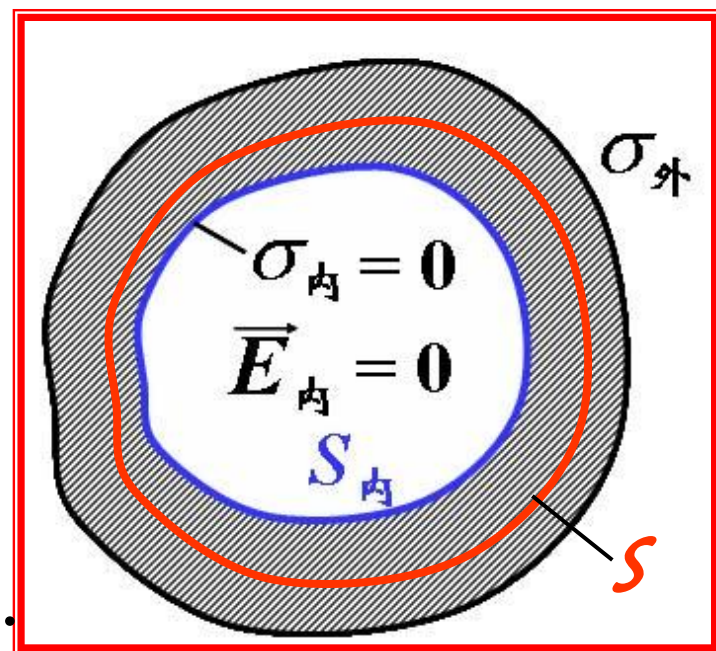
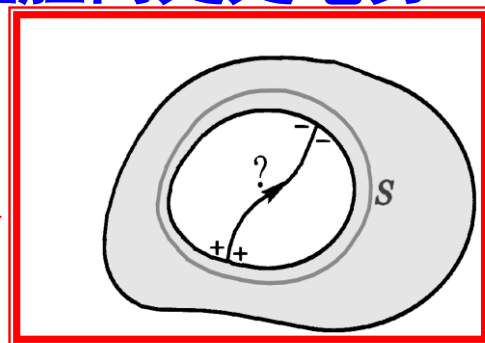
- 包围导体空腔的导体壳**内表面**上处处没有电荷，电荷分布在导体**外表面**，空腔内处处 $E=0$ ，**空腔内处处电势相等**。

[证明] 在导体中包围空腔选取高斯面 S ,

则: $\because \oint_S \vec{E}_{\text{导内}} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \therefore \oint_{S_{\text{内}}} \sigma_{\text{内}} \cdot ds = 0,$

若 $\sigma_{\text{内}} \neq 0$, 则 $\sigma_{\text{内}}$ 必有正负, 便有 **E 线**从正电荷到负电荷, 导体内表面出现了**电势差**。这与导体为等势体矛盾, $\therefore$ 只能 $\sigma_{\text{内}} = 0$, 且腔内无 **E 线**。

$$\because E_{\text{内}} = 0 \rightarrow \Delta U = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$



导体空腔（腔内有带电体 q 情况）

■ 必有 $\sigma_{\text{内}} \neq 0$ ，且 $q_{\text{内表}} = -q$ ， $\sigma_{\text{外}}$ 可不为 0

[证明] 在导体中包围空腔选取高斯面 S ，则：

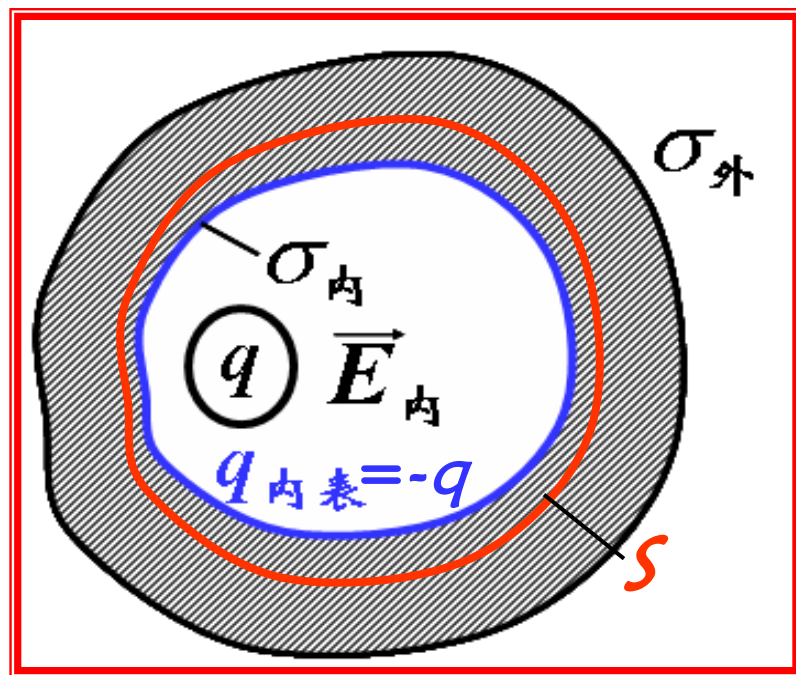
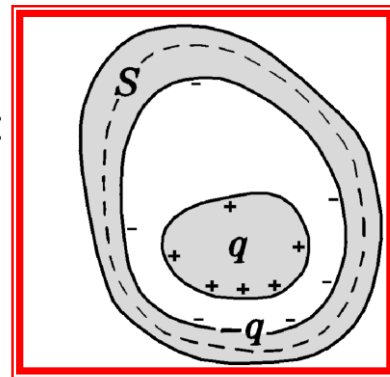
$$\oint_S \vec{E}_{\text{导中}} \cdot d\vec{s} = 0 = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q_{\text{内表}})$$

$$\therefore q_{\text{内表}} = -q$$

$$\sigma_{\text{内}} \neq 0$$

$$E_{\text{内}} \neq 0$$

导体内表面上所带电荷与腔内电荷的代数和为零。



(4) 表面场强

导体表面附近的场强方向与表面垂直，大

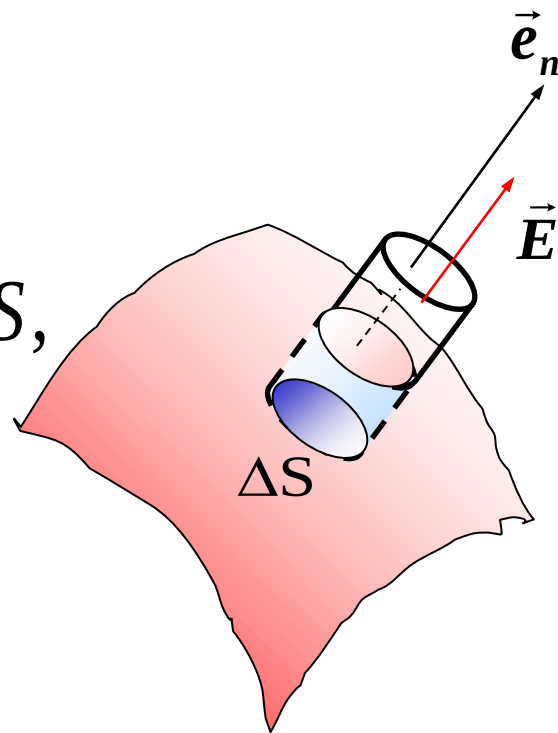
小为 σ_e/ϵ_0

[证明] 1) 方向：如不垂直， $\vec{E}$ 有切向分量，电荷受力将移动 $\rightarrow$ 没有达到静电平衡； 2) 大小：取高斯面如下图

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S \text{ 内}} q_i = \sigma_e \Delta S / \epsilon_0,$$

$$\text{又 } \iint_{\text{上底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{下底}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{侧面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \Delta S,$$

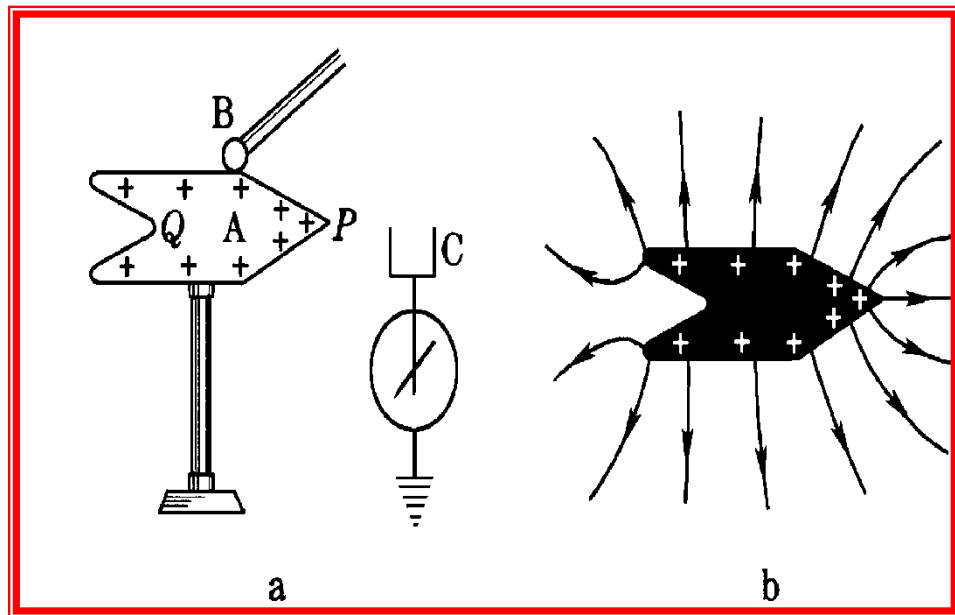
$$\therefore E = \sigma_e / \epsilon_0, \quad \vec{E} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \vec{e}_n.$$



(5)表面电荷分布（回忆与讨论）

- 孤立导体表面的面电荷分布很复杂；
- 分布与外表面曲率和导体形状有关；
- 面电荷密度与曲率之间并不存在单一的函数关系。

- 导体表面凸出而尖锐的地方(曲率较大)，电荷面密度较大；
- 导体表面平坦的地方(曲率较小)，电荷面密度较小；
- 导体表面凹进去的地方(曲率为负)，电荷面密度更小。



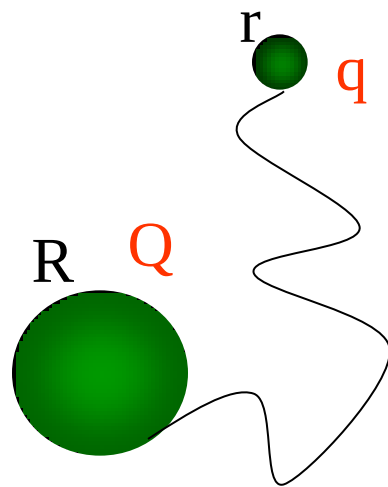
【例】半径分别为 R 和 r ($R>r$)导体球放置在相距无限远的两个地方，中间用细导线连接。导体球分别带电 Q 和 q ，求两球表面电荷面密度与曲率的关系。

【解】 两个导体所组成的整体可看成是一个孤立导体系统， U 相等，每个球可近似的看作为孤立导体，球表面电荷分布均匀，则两球的电势为：

$$U_R = U_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r},$$

$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}, \quad \frac{4\pi R^2 \sigma_R}{4\pi r^2 \sigma_r} = \frac{R}{r},$$

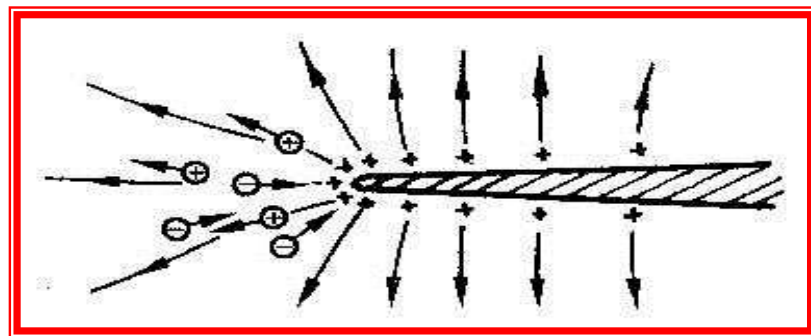
$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R}. \quad \text{电荷面密度与半径成反比}$$



3. 导体在静电场中性质的应用

■ **尖端放电** 曲率大, σ_e 大, $E = \sigma_e/\epsilon_0$ 大

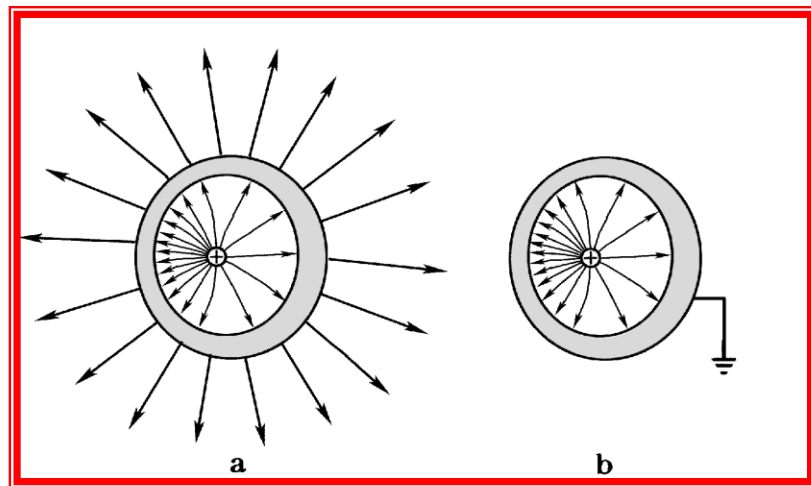
- 避雷针
- 静电复印机
- 场致发射显微镜
- 范德格拉夫起电机



■ **静电屏蔽** 空腔导体可以保护腔内空间不受腔外带电体的影响

- 屏蔽室
- 带电作业
- 范德格拉夫起电机

■ **库仑定律的精确验证**



尖端放电及其应用

■ 危害：

- 雷击对地面上突出物体（顶端）的破坏性最大；
- 高压设备尖端放电漏电等。

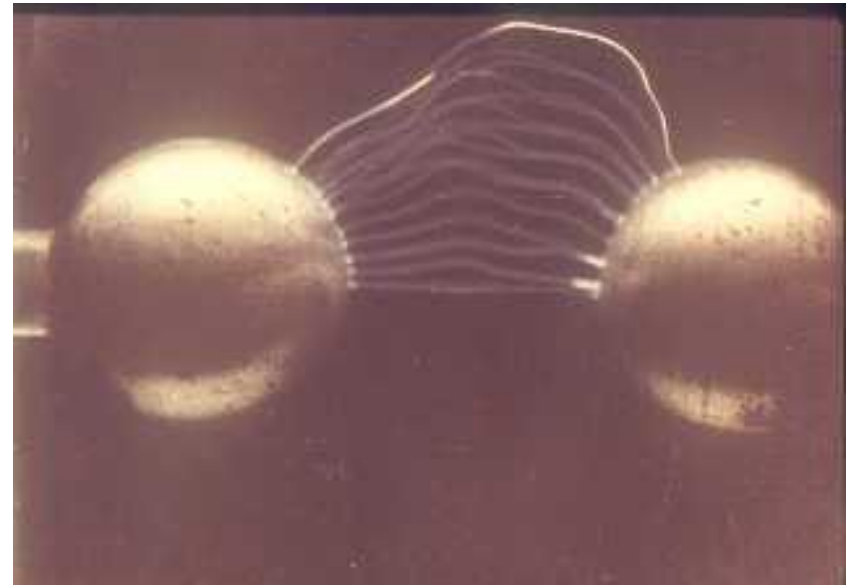
■ 应用实例：

- 避雷针（演示实验）
- 高压输电中，把电极做成光滑球状
- 范德格拉夫起电机起电原理就是利用尖端放电使起电机起电
- 场离子显微镜（FIM）、场致发射显微镜(FEM)乃至扫描隧道显微镜(STM)等
- 静电复印机

云层和大地间的闪电



空气中的直流高压放电图片

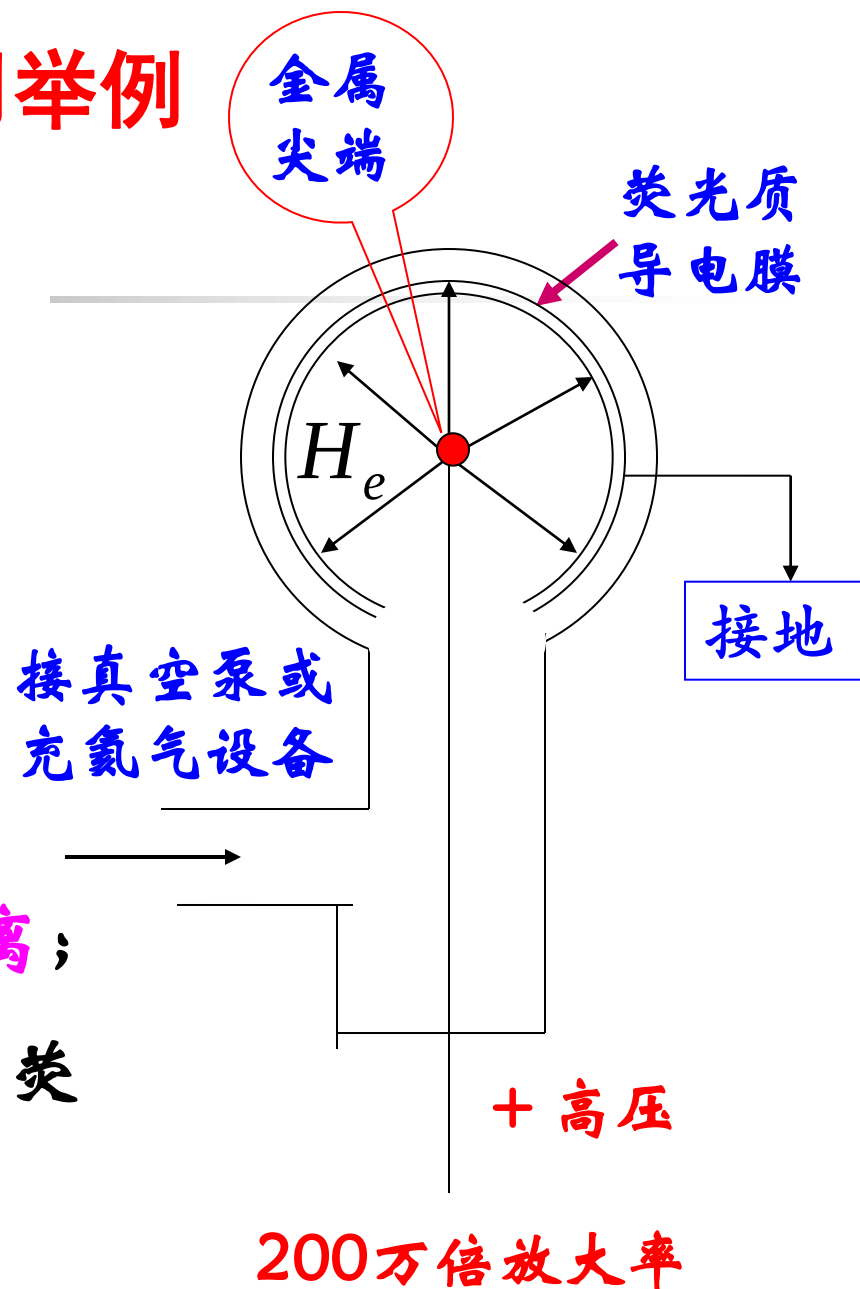


金属尖端的强电场的应用举例

场离子显微镜(FIM)

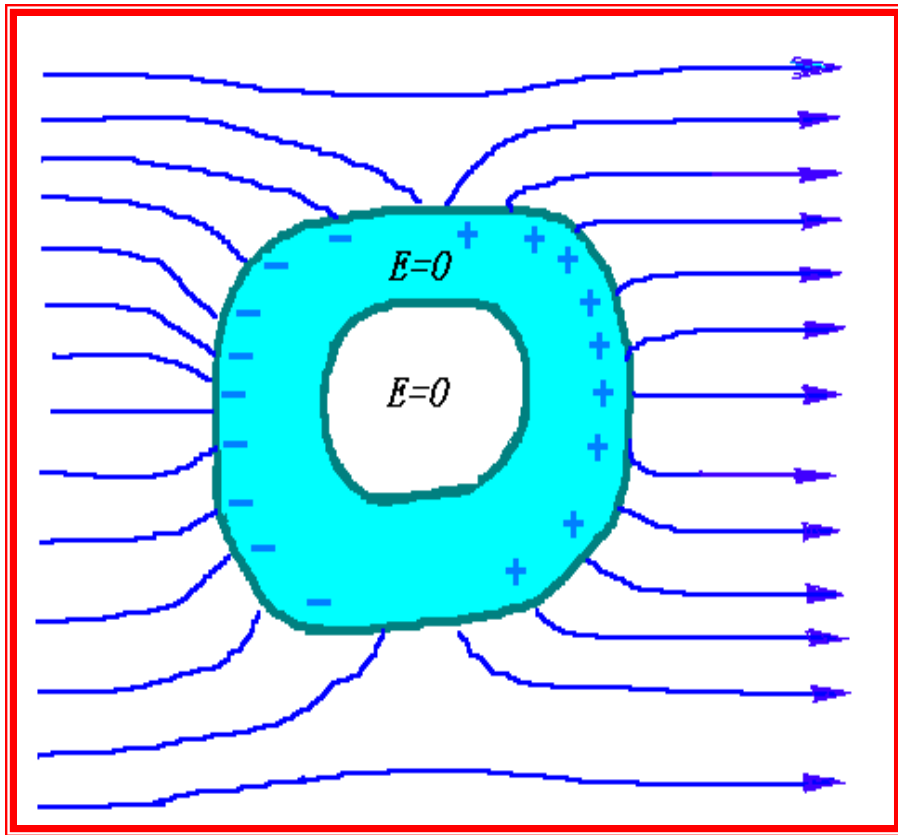
原理:

- 样品制成针尖形状;
- 针尖与荧光膜之间加高压;
- 样品附近有极强的电场;
- E使吸附在样品的氦原子电离;
- 氦离子沿电力线运动, 撞击荧光膜引起发光
- 从而获得样品表面的图象



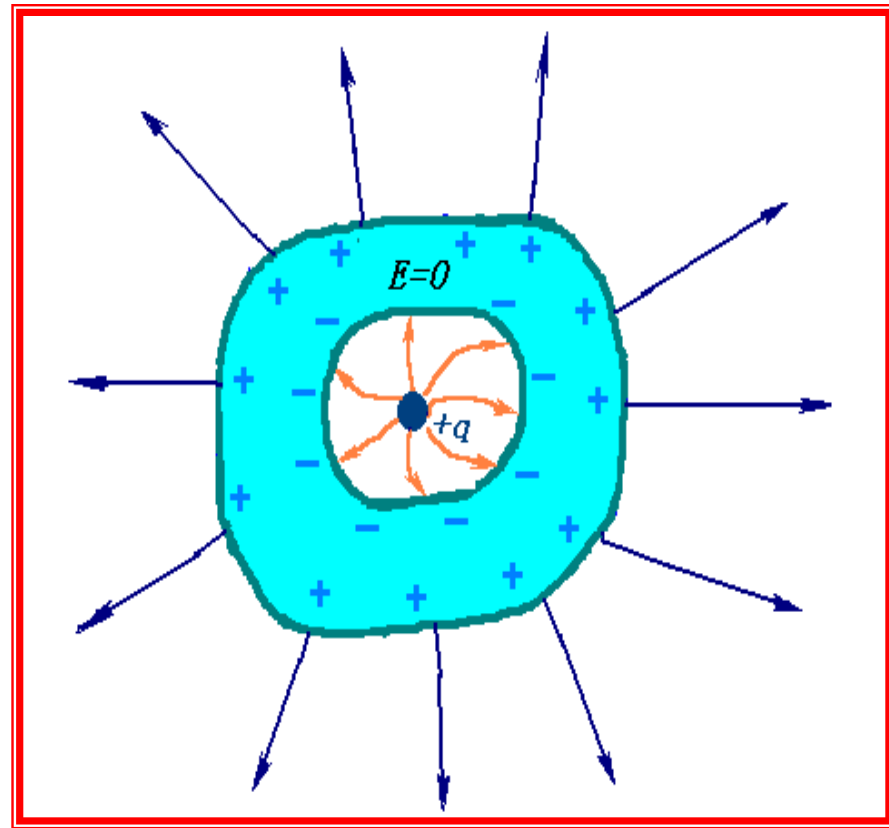
静电屏蔽

(1) 空腔**不接地**，腔外不影响腔内



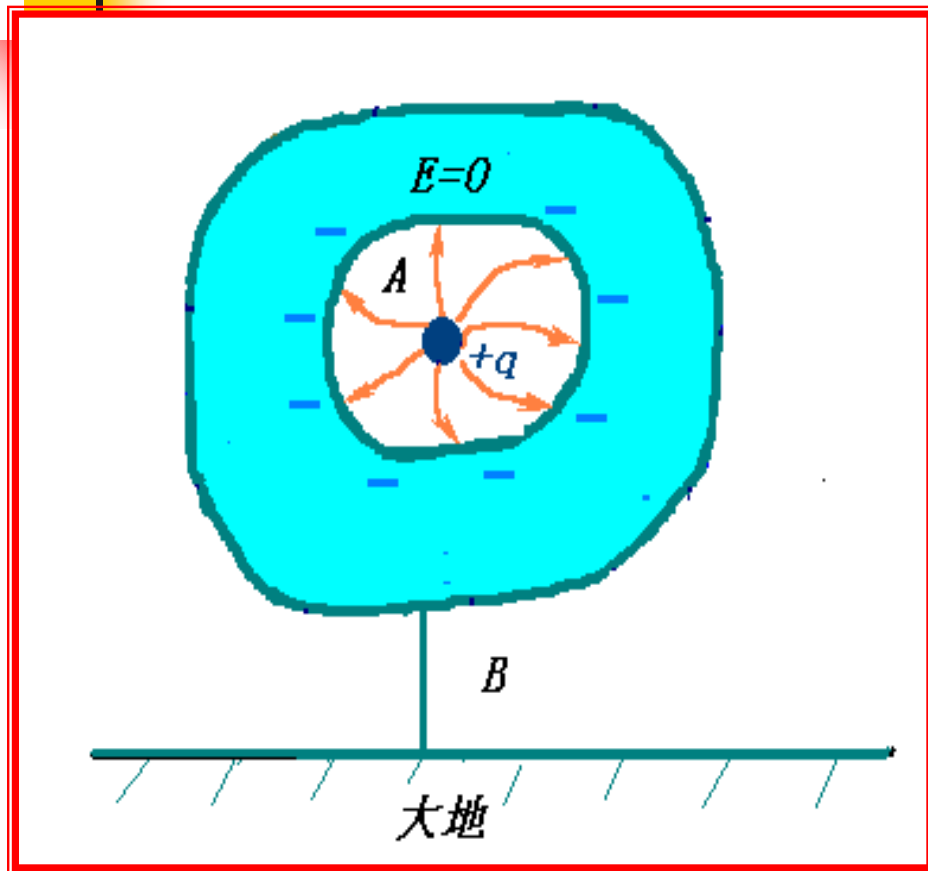
腔内无电荷

(2) 空腔**不接地**，腔内却影响腔外

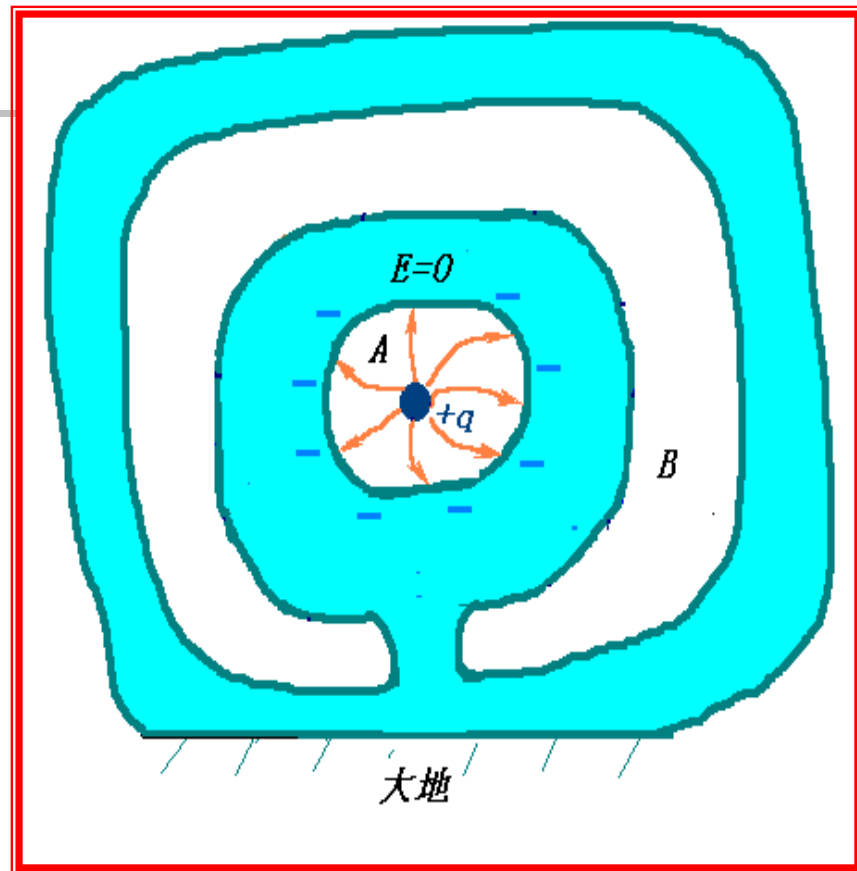


腔内有电荷

(3) 空腔**接地**，腔内腔外互不影响



腔内有电荷，导体腔接地



等效图

静电屏蔽



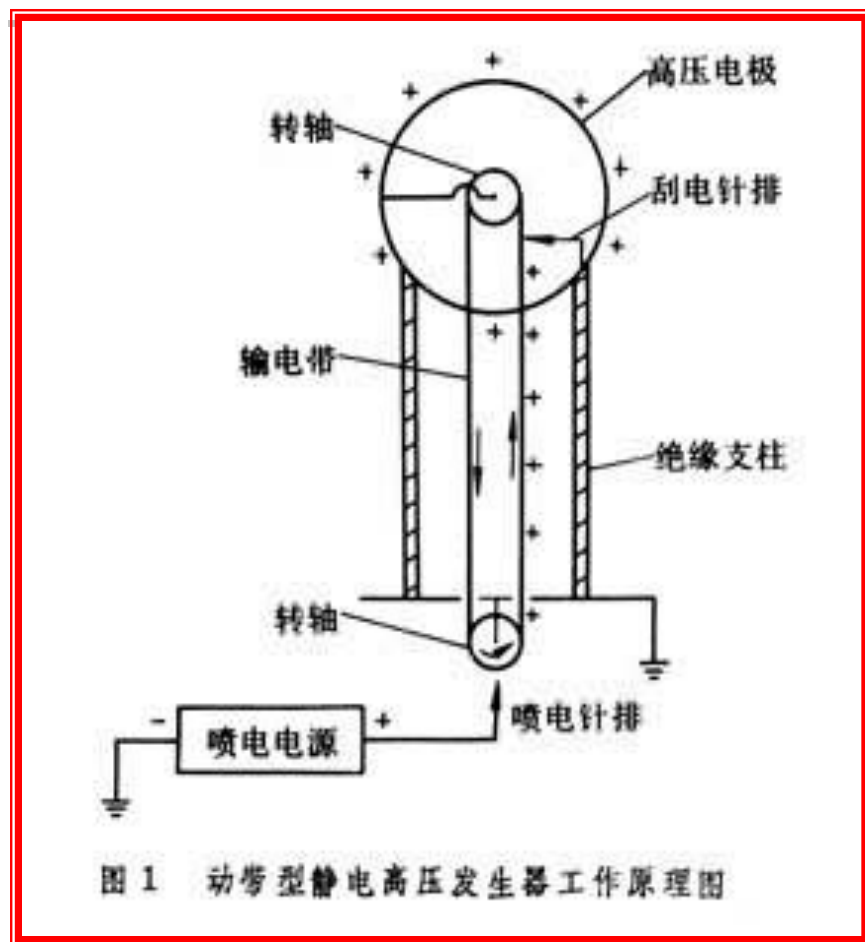
范德格喇夫起电机

■ 金属球壳的**高压电极**由绝缘支柱支撑着，绝缘材料制成的**输电带**在两个转轴间不停地运动。

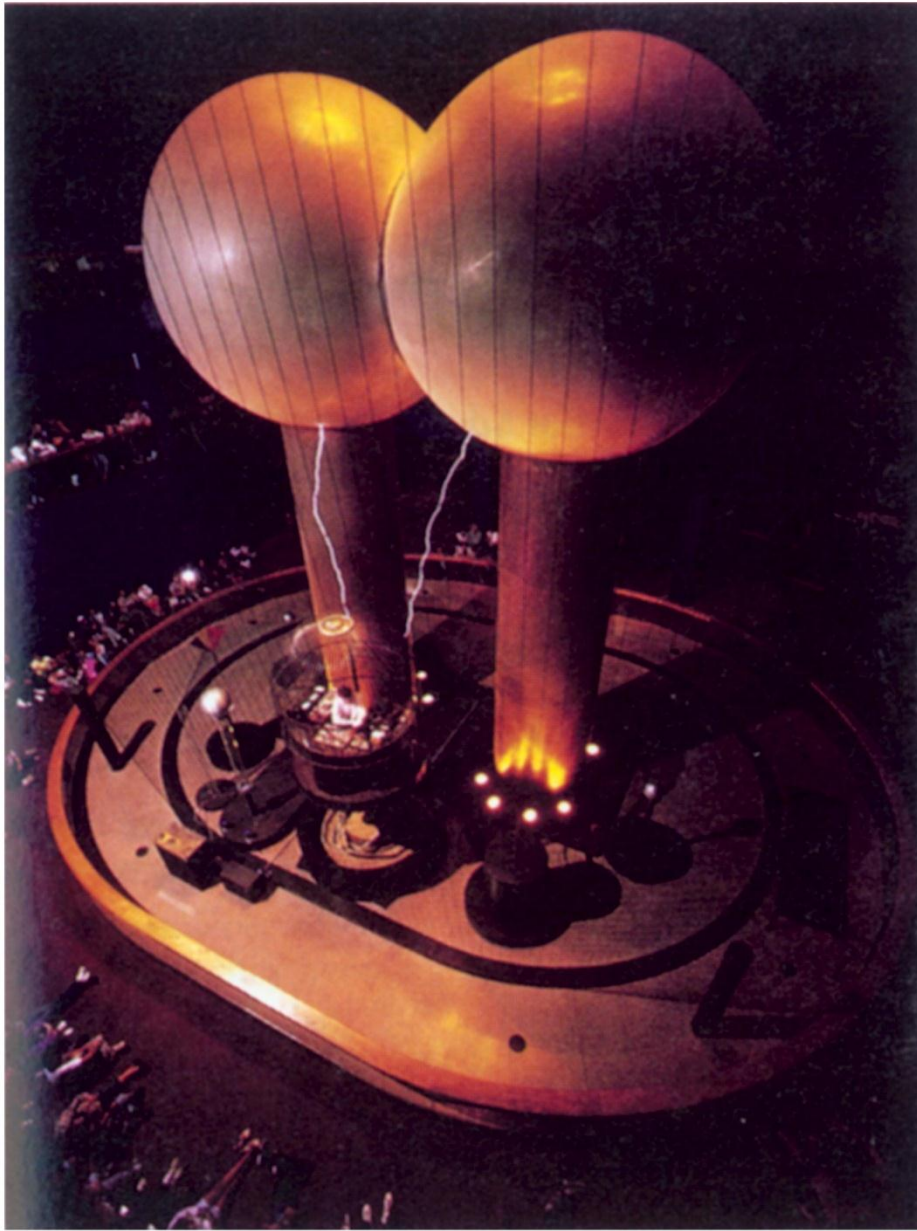
■ **喷电针排**连接在喷电电源上，通过针尖在气体中的电晕放电，使周围与针尖极性相同的离子在电场作用下从针尖喷向输电带，使输电带充电。

■ 随着输电带的运动，带上的电荷进入高压电极。极内**刮电针排**同高压电极相连和输电带之间所形成的电场，同样使气体电晕放电，从而使电荷转移到高压电极上去。

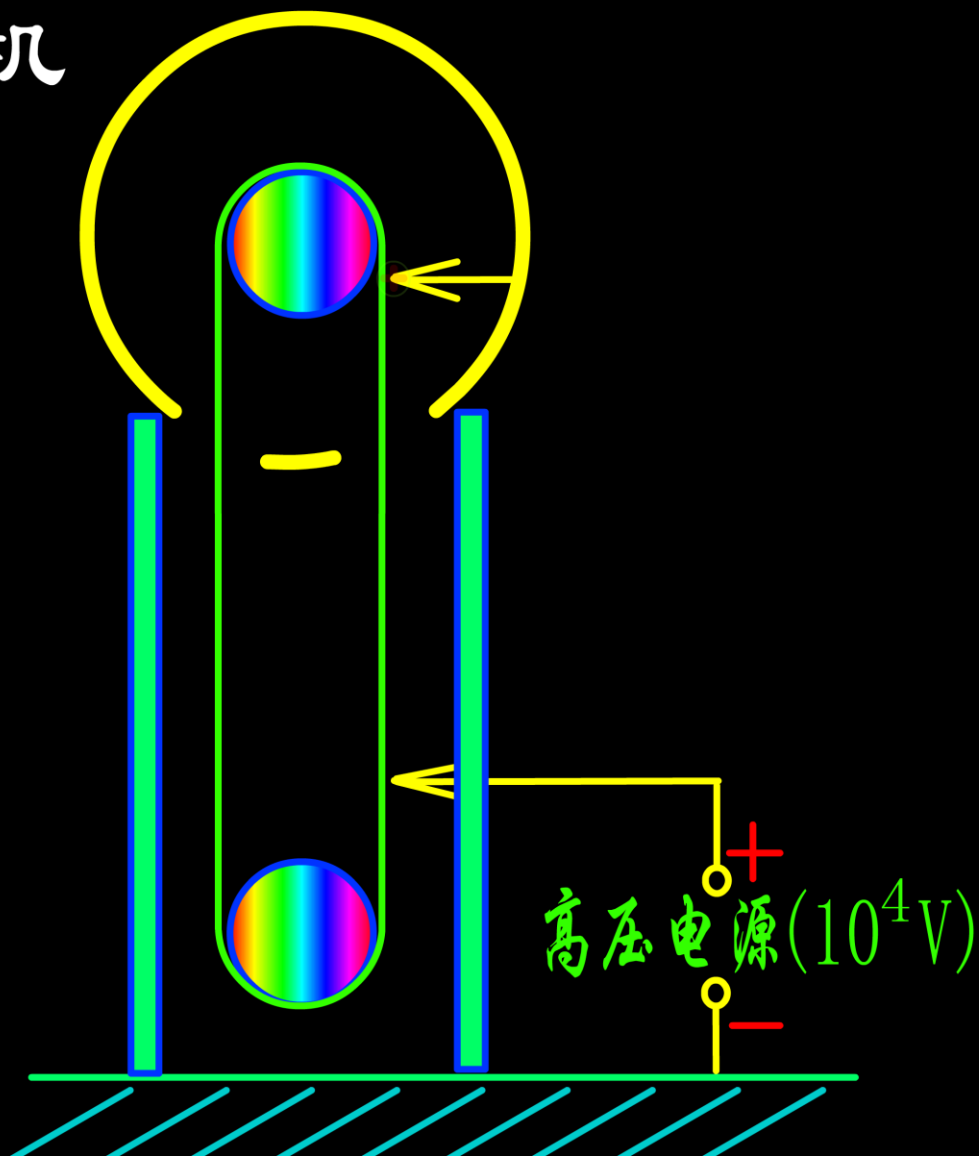
■ 随着不停传送电荷，高压电极的电压很快地升高。



范德格拉夫起电机



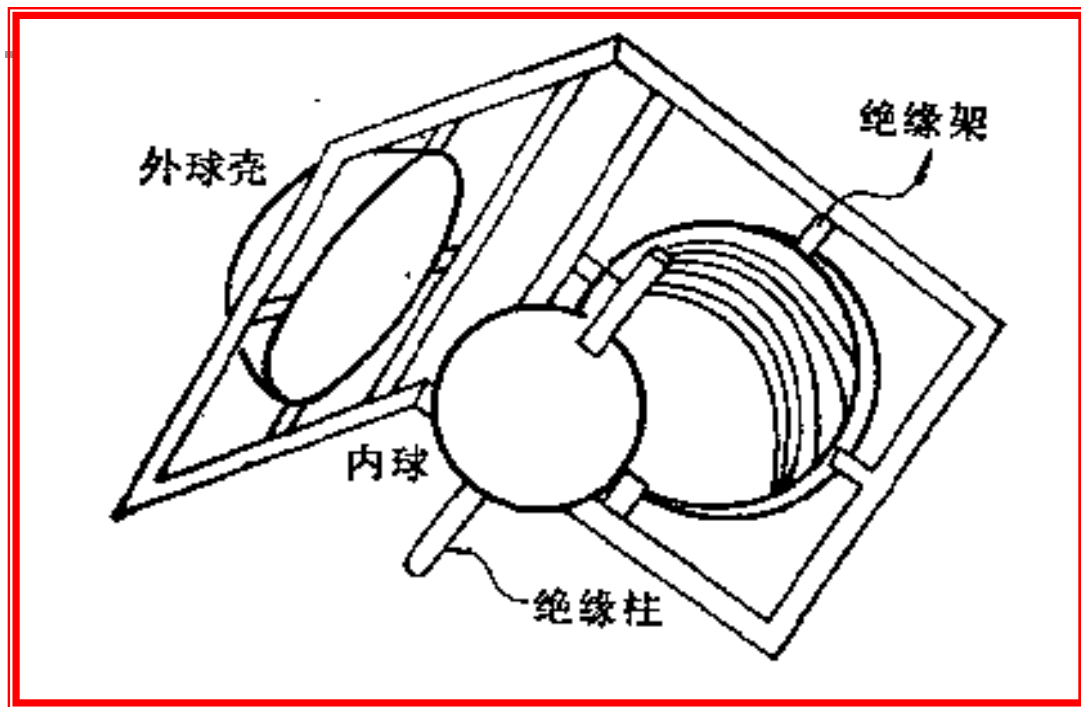
静电起电机



开始

高斯定理和库仑定律的精确验证

导体**内球**固定在绝缘支柱上，导体**外球壳**为两个半球壳拼接而成。**实验时**，**先**使内球带电，**然后**用导线将内球与外球壳连接，使球壳带电，**再抽走**导线。在上述操作之后，将两半球壳打开，用精确的验电器**检测内球上的电量**。



卡文迪许的实验装置

§ 2.3 电容和电容器

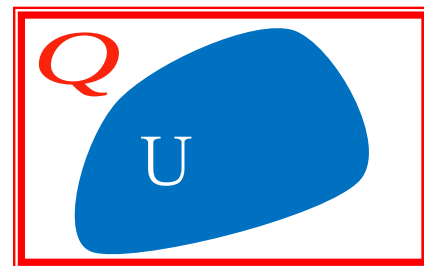
一、孤立导体的电容(capacity)

- 孤立导体：空间只有一个导体，在其附近没有其它导体和带电体

- 电容定义：

- 一个带有电荷为 Q 的孤立导体,其电势为 U (无穷远处为电势零点)则有：

$$C = Q / U$$



- 物理意义：

- 电容表征使导体每升高单位电势所需的电量，是描述导体或导体系容纳电荷的性能的物理量；
 - C 由导体的形状、大小及周围的环境决定(介质)；
 - C 的值与导体所带电量多少和电势 U 的大小无关。

■ 电容的单位:

- $C=Q/U$
- 单位: 库仑/伏特, 简称法拉, 记作F
- **1 μ F**(微法拉) = **10⁻⁶F**, **1pF**(微微法拉) = **10⁻¹²F**

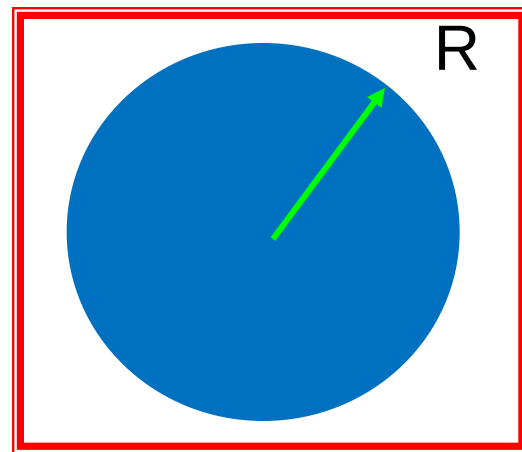
[例]: 求孤立导体球的电容, 设半径为**R**。

$$U = \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R$$

注:

- 孤立导体的电容越大, U一定时储存的Q越多
- 孤立导体的半径越大, 电容越大



思考：用孤立导体球要得到**1F** 的电容，球半径为多大？

$$C = 1\text{F 时}, R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 (\text{m}) \approx 1.4 \times 10^3 R_E$$

$$R = R_E \text{ 时}, C = 4\pi\epsilon_0 R_E = 7 \times 10^{-4} F, (R_E = 6.4 \times 10^6 m)$$

- 孤立导体的电容一般很小，不能满足使用的需求
- 实际的电容附近存在其他导体，孤立导体近似难满足
- 导体的电势，与周围的电荷、导体及介质有关

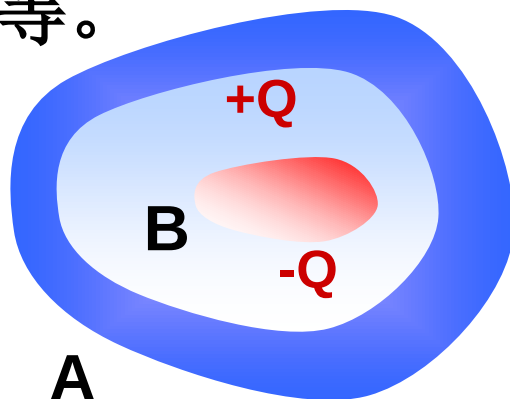
二、电容器 (capacitor)

■ 构成:

- 两个彼此绝缘而又互相靠近的导体组成的系统;
- 导体可以是金属板, 金属薄膜等;
- 两个导体带有等量异号的电荷, $\pm Q$;
- 夹层绝缘物质可以是空气、纸、云母片、塑料、不导电的液体等等。

■ 特点:

- 增大电容值;
- 静电屏蔽。



$$C = \frac{Q}{|U_A - U_B|} = \frac{Q}{U_{AB}}$$

导体壳内部的场只由腔内的电量和几何条件及介质的性质决定。

70
厘米



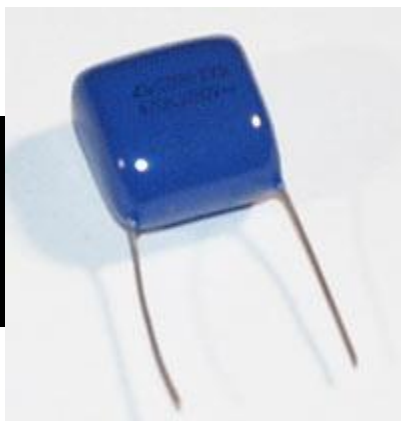
高压电容器(20kV 5~21 μ F)
(提高功率因数)

12
厘米



聚丙烯电容器
(单相电机起动和连续运转)

2.5
厘米



涤纶电容
(250V0.47 μ F)



陶瓷电容器
(20000V1000pF)

2.5
厘米



电解电容器
(160V470 μ F)

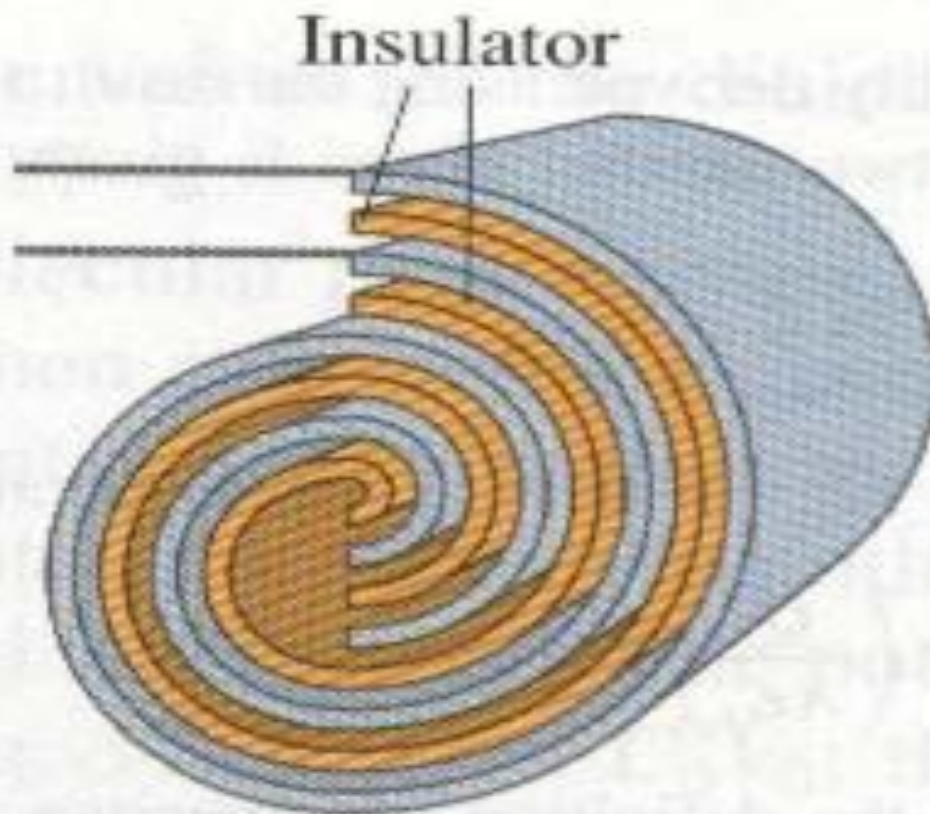


陶瓷电容器



薄膜电容器





■ 分类

- 按**结构**：固定电容器、可变电容器和半可调电容器
- 按**介质**：无机介质、有机介质、电解电容器、液体介质
- 按**用途**：高频旁路、低频旁路、滤波、调谐、高频耦合、低频耦合、小型电容器。

■ 作用：阻直流、通交流

- 隔直流、让交流通过。常**用于电路中的**：**旁路**：为交流电路中某些并联的元件提供低阻抗通路；**滤波**：将整流的锯齿波变为平滑的脉动波；**整流**：在预定的时间开启或者关闭半导体开关元件。
- **调频**：用于各种**电磁波发射、接收**装置中。
- **储能**：储存电能，用于必须要的时候释放。

几种常见的电容计算

■ 平板电容器，两极板面积 S ，
两极间距 d ($S \gg d^2$)

[解] 令两极板分别带电量 $\pm Q$ ，
则：

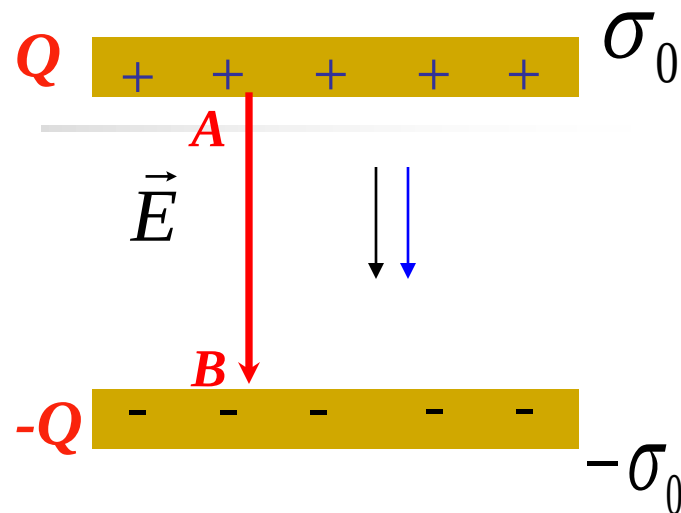
$$\text{极间电场强度: } E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

$$\text{两级间电势差: } \Delta U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

$$\text{电容器的电容: } C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$C \propto S$ ， S 为有效面积，即两极板相对之面积；

$C \propto 1/d$ ，对其它形状电容器也适用； C 还与极
板间介质有关



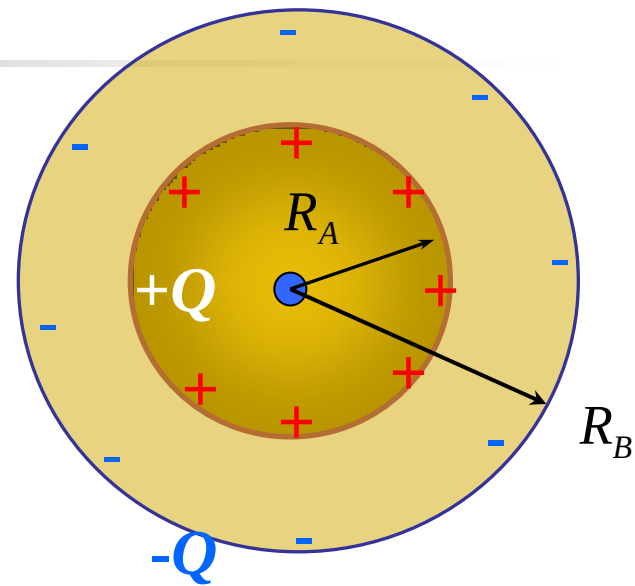
$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

同心导体球壳

设内球面半径 R_A ，外球面半径 R_B ，带电量为 Q

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_{R_A}^{R_B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$
$$= \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)$$



$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

• 当 $R_A, R_B \gg R_B - R_A$ 时，可令 $R_B - R_A = d$ ， $R_B R_A = R^2$ ，
则同平板电容器 $C = 4\pi\epsilon_0 R^2 / d = \epsilon_0 S / d$

• 当 $R_B \gg R_A$ 时，同孤立导体球的电容 $C = 4\pi\epsilon_0 R_A$

■ 同轴柱形导体壳

设长为 L ，带电量为 Q ，内半径为 R_A ，外半径为 R_B ，
且 $L \gg R_B - R_A$

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

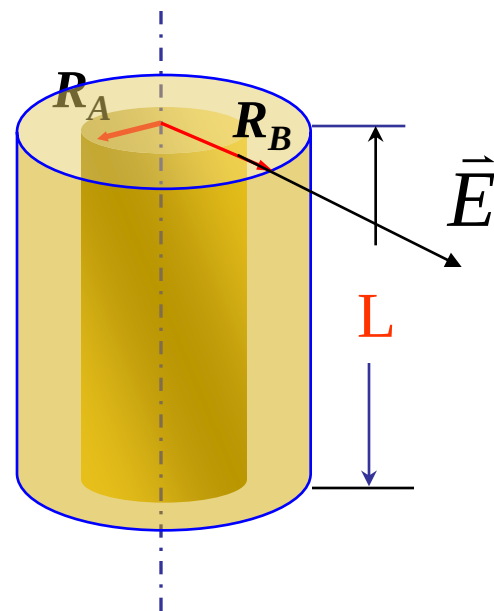
$$\because E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad \lambda = \frac{Q}{L}$$

$$U_{AB} = \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

$$C = Q/U_{AB}$$

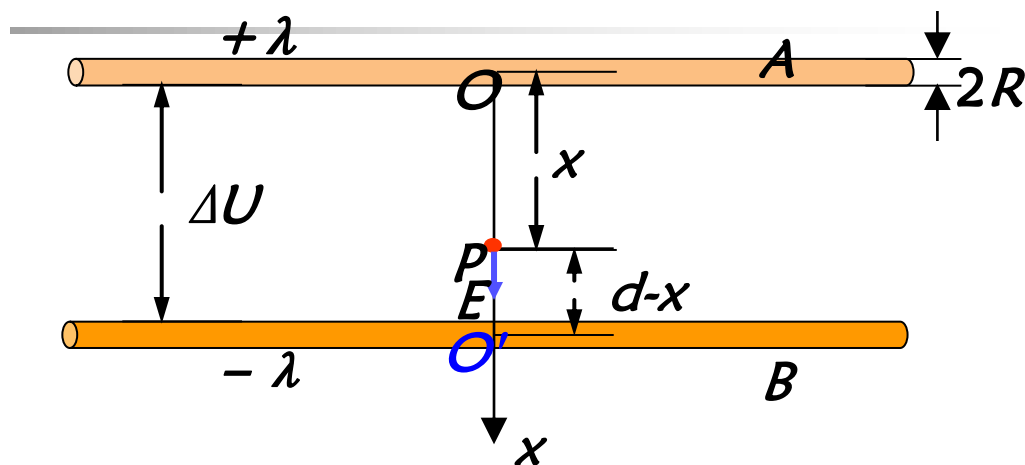
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln R_B / R_A}$$



■ 常见的电路中的分布电容

设有两个半径都为 R 的平行直导线,它们之间的距离为 d , 且 $d \gg R$, 求单位长度的电容 c

解:根据场强叠加原理: $+\lambda$ 在 x 处的电场和 $-\lambda$ 在 $(d-x)$ 处的电场相加, E 的方向沿 x 轴的正方向,



$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{d-x} \right)$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^{d-R} E dx \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_R^{d-R} \left(\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{d-x} \right) dx \\ &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-R}{R} \approx \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{R} \end{aligned}$$

$$c = \frac{\lambda}{\Delta U} \approx \pi\epsilon_0 / \ln(d/R)$$

小结

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}$$

$$C = \epsilon_0 S / d$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln R_B / R_A}$$

■ 计算电容的一般方法:

- 先假设电容器的两极板带等量异号电荷
- 关键是求出极板之间的电场强度 **E**
- 由**E**再求出极板之间的电势差 **U**
- 代入定义式**C=Q/U**求出电容

三、电容器的连接

电容器的基本联接方式有两种：串联与并联。

1. 电容器串联

右图给出 N 个电容器串联的情况。由静电感应原理知，每一个电容器上带电量大小都是 Q

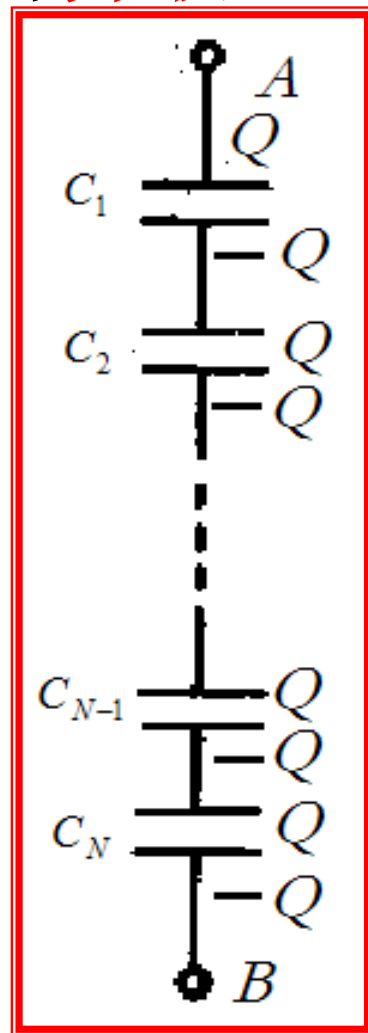
$$\left\{ \begin{array}{l} Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = \cdots = C_{N-1} U_{N-1} = C_N U_N, \\ U_{AB} = U_1 + U_2 + \cdots + U_N = \sum_{i=1}^N U_i = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}, \end{array} \right.$$

得

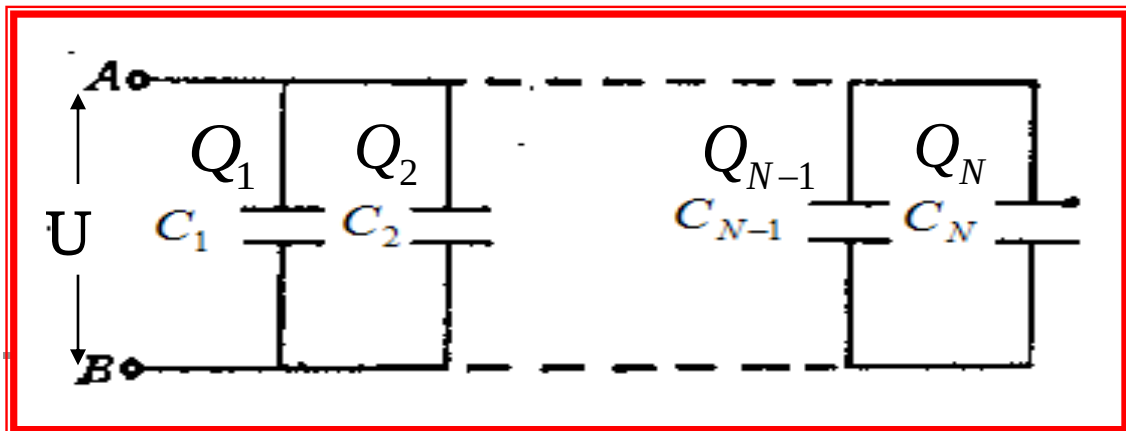
$$\frac{U_{AB}}{Q} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

故有

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$



2. 电容器并联



右图给出 N 个电容器并联的情况。 A 、 B 两端电势差为 U ，总电量大小为 Q ，则

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{N-1} + Q_N \\ &= C_1 U + C_2 U + \dots + C_{N-1} U + C_N U. \end{aligned}$$

总电容为 C ，则有：

$$C = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + \dots + C_{N-1} + C_N = \sum_{i=1}^N C_i.$$

并联可增加系统的电容值。相反，串联会减小电容值，但可提高整个电容器的耐压性能。

§ 2.4 电介质

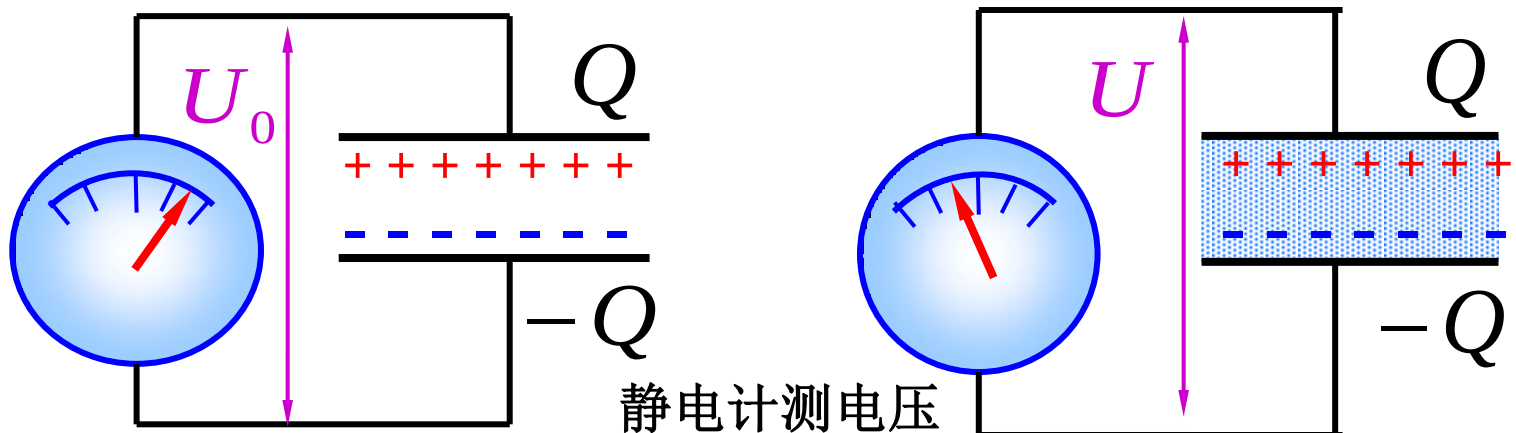
电介质 (Dielectric)

- 是电的绝缘体，内部没有自由电荷，不能导电
- 由大量电中性的分子组成，分子中电子被原子核束缚得很紧
- 紧束缚的正、负电荷在外场中是否发生变化？

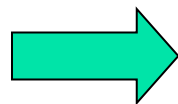
电场  电介质
相互作用？

由实验来回答！

一、法拉第实验：电介质对电场的影响



- 充电的电容器两板连接到静电计
- 静电计指针显示两板间的电势差
- 保持一切条件不变，插入电介质
- 静电计指示两极板间电势差减小



介质与外
电场发生
相互作用

(演示实验)

一、法拉第实验：电介质对电场的影响

■ 物理原因（逻辑推理）

$$U_0 > U$$

$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}'$ 标志电介质的影响，由此可知它与外场 $\vec{E}_0$ 方向相反。

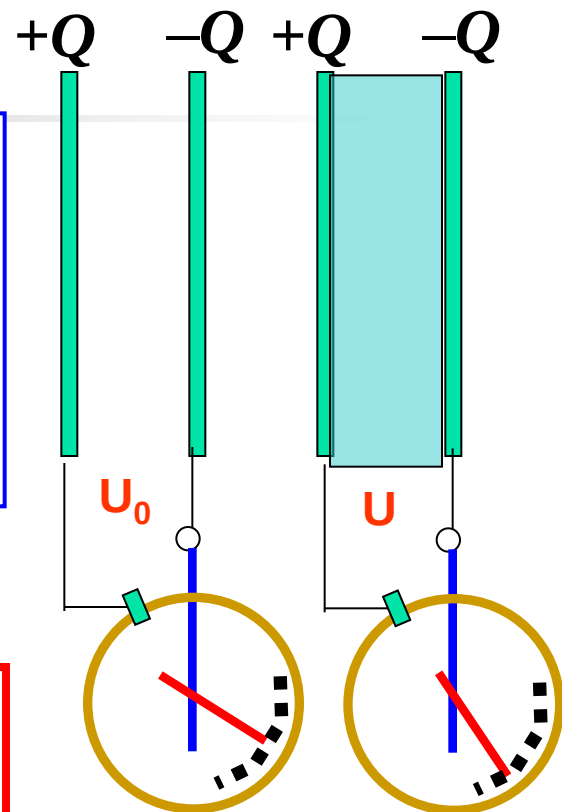
$$\vec{E}_0 > \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$$\therefore \vec{E}' < 0$$

$$\because \vec{E} \neq 0,$$

$$\therefore E' \neq E_0.$$



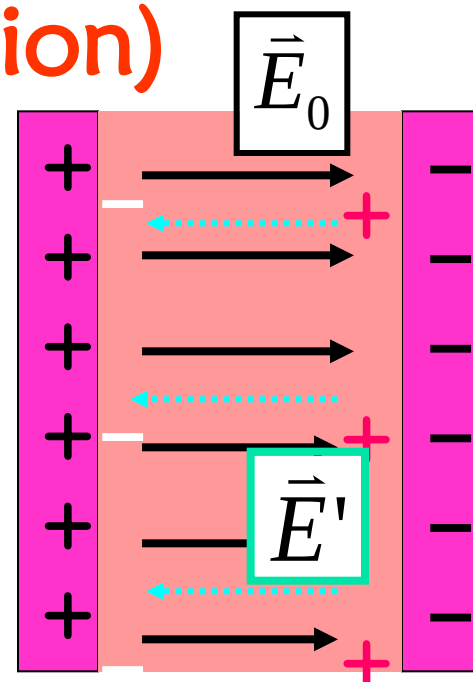
静电计测电压

二、介质极化 (polarization)

$\vec{E}'$ 与 $\vec{E}_0$ 反向

只有电荷才能
产生电场

电介质的表
面出现了与
极板电荷**异
号**的电荷



极化电荷：电介质表面出现的这种电荷只能在分子范围内移动，与电介质是不可分离的，称为**极化电荷**，它是一种**束缚电荷**。

电介质在外电场作用下，其表面甚至内部出现极化电荷的现象，叫做**电介质的极化**。

电介质中的总电场为两个电场之和： $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \neq 0$

三、介质微观结构（模型方法）

■ 重心模型：

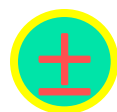
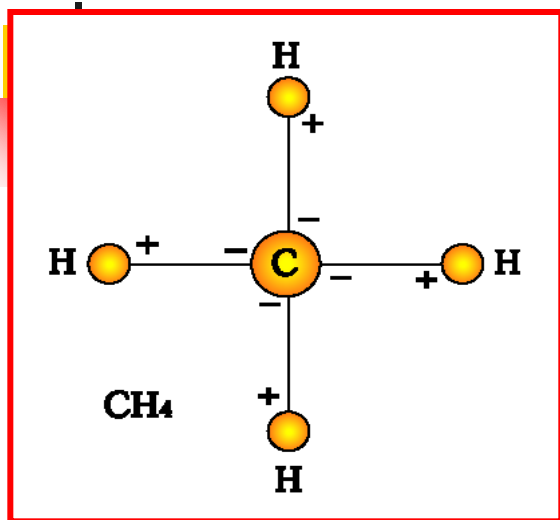
- 在分子中，所有正电荷和所有负电荷分别集中于两个几何点上，此点称为正、负电荷的重心。
- 电荷分布和其重心都是对“时间”的一种平均。

■ 介质分类

电介质分子可分为无极和有极两类

- 无极分子：分子电荷的正、负“重心”重合，在无外场作用下整个分子无固有电偶极矩。如：
He, Ne, O₂, N₂, CH₄ ...
- 有极分子：分子电荷的正、负“重心”分开，在无外场作用下整个分子有固有电偶极矩，如：
水, HCl, NH₃, CH₃OH(甲醇) ...

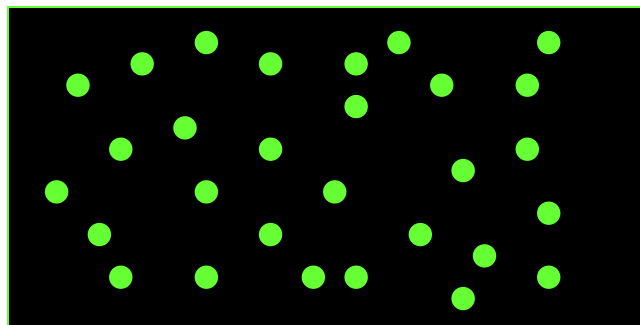
无极分子



$$p = qL$$

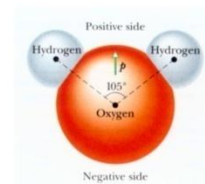
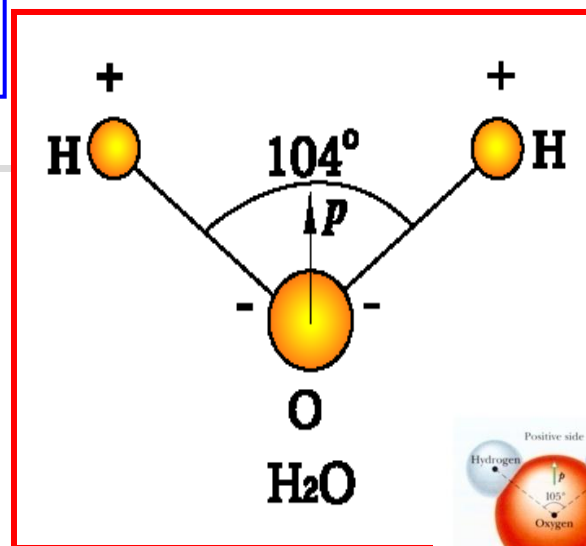
电子云的
正电重心

无外场时(热运动)

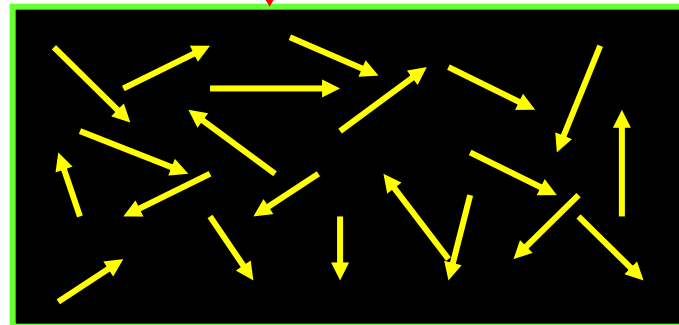


无序排列
对外不呈
现电性!

有极分子



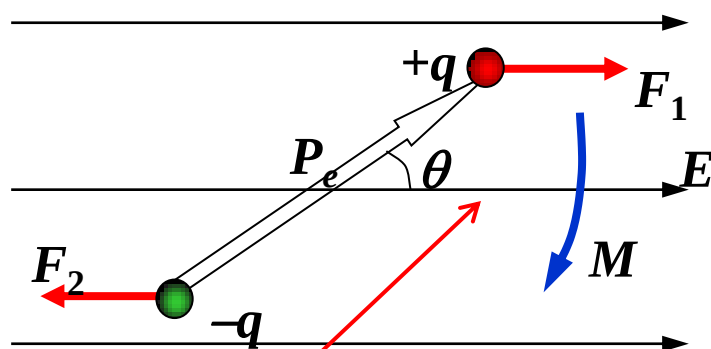
整体对外不显电性



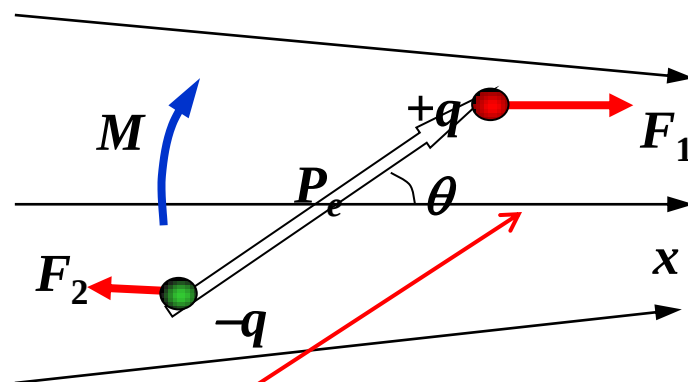
$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

电偶极子在 $\mathbf{E}$ 中的受力



电偶极子在 $\mathbf{E}$ 中的力矩



$\Sigma \mathbf{F} = 0$ (均匀电场) ; $\Sigma \mathbf{F} \neq 0$ (非均匀电场)

均匀外场中电偶极子不受力，但受力矩；在外电场力矩作用下， $\mathbf{p}$ 总是朝向 $\mathbf{E}$ 一致的方向偏转。
在非均匀外场中电偶极子既受力，又受力矩作用。

四、极化微观模型

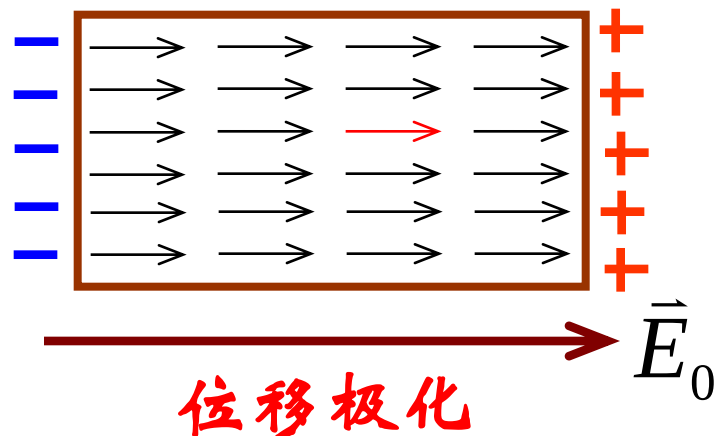
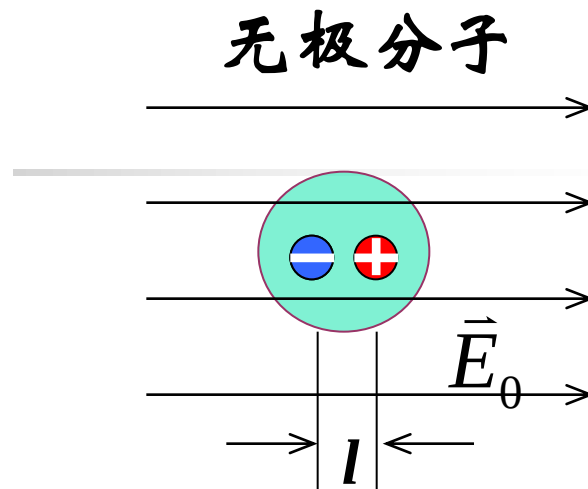
(1) 无极分子的极化

- 在**进入外电场前**，无极分子的正、负电荷重心重合，没有电偶极矩。

$$\mathbf{p}_{\text{分子}} = 0$$

$$\sum \mathbf{p}_{\text{分子}} = 0$$

- **进入外场后**，在电场的作用下，正、负电荷的重心发生位移，不再重合，形成电偶极子，表面出现**束缚电荷**。
- 这时极化是电荷重心相对位移的结果，称为**位移极化**。



$$\sum \vec{p}_{\text{分子}} \neq 0$$

(2) 有极分子的极化

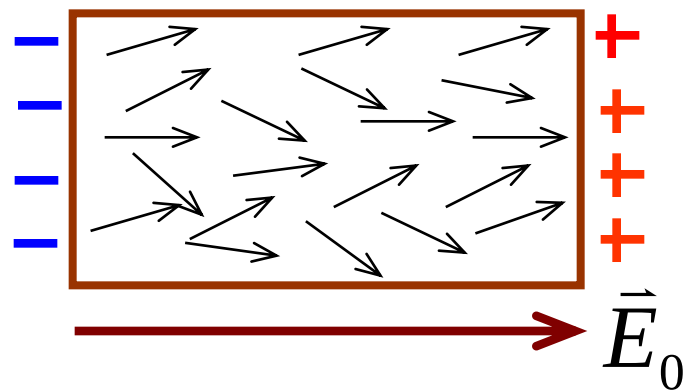
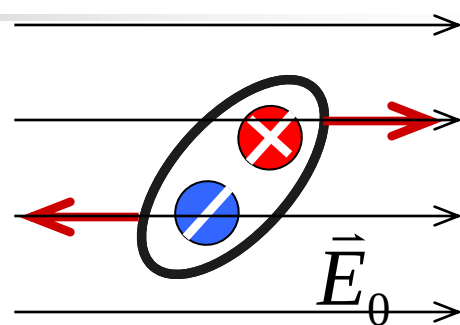
- **进入外场前**有极分子就相当于一个电偶极子，只是由于热运动而排列无序。

$$\mathbf{p}_{\text{分子}} \neq 0 \quad \text{但是} \quad \sum \mathbf{p}_{\text{分子}} = 0$$

- **进入外场后**，分子受到力矩的作用而发生偏转，**电偶极矩转向外场方向**。所以，这种极化称为**取向极化**。

$$\sum \mathbf{p}_{\text{分子}} \neq 0$$

有极分子



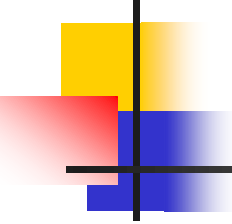
取向极化

几点说明：

- **在外电场中**，均匀介质**内部**各处仍呈电中性，只在介质**表面出现极化电荷**。
- **极化电荷**不能离开电介质到其它带电体，也**不能在电介质内部自由移动**，它不象导体中的自由电荷能用传导方法将其引走，是一种**束缚电荷**。
- **介质极化**：无电荷宏观移动，**只有微观迁移**，对应**束缚电荷**的变化；**静电感应**：有自由电荷的宏观移动，出现**感应电荷**。
- **无外场下**，所具有的电偶极矩称为**固有电偶极矩**；**有外电场**时，产生的电偶极矩称**感应电偶极矩**（约是前者的 10^{-5} ）。
- **无极分子**只有**位移极化**，感生电矩的方向沿外场方向；**有极分子**有上述两种极化机制，**取向极化远强于位移极化**（约大一个量级）。
- **极化电荷的电场**使介质中实际电场减弱。

电介质与导体的区别

	电介质	导体
导电性	不导电	导电
在静电场中	电子和原子核在电场力作用下在原子范围内作 微观的相对位移	自由电子在电场力作用下脱离所属原子作 宏观移动
静电平衡时	内部场强 $E \neq 0$	内部场强 $E = 0$



§ 2.5 极化强度矢量 $\mathbf{P}$ (定量表达)

一、极化强度矢量 $\mathbf{P}$

二、 $\mathbf{P}$ 与极化电荷的关系

三、 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 的关系

一、极化强度矢量 $\vec{P}$ (electric polarization)

- 引入：电介质极化后，在其内部任意一宏观体积元 ΔV 内 $\sum \vec{p}_{\text{分子}} \neq 0 \rightarrow$ 如何定量描述介质的极化？
- 定义：单位体积内分子电偶极矩的矢量和：

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V} \quad \text{or} \quad \vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V}$$

- 描述介质在外电场作用下被极化程度和方向的量；
- 单位：库仑/米²， $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ 。

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_{\text{分子}}}{\Delta V}$$

宏观量

介质中一点的P(宏观量)

介质的体积元, 宏观小微观大(包含大量分子)

- 极化强度是一个**宏观矢量**的点函数，其微观值无意义。
- 电介质中**每一个点有唯一的极化强度**。如果各处的**P**值相同，则称电介质在电场中均匀极化。
- **P**反映**分子电矩** $\vec{p}_{\text{分子}}$ 的**大小和空间有序化程度**。

■ 极化电荷

- 从原来处处电中性变成出现了**宏观的极化电荷**
- 可能出现在介质表面 (均匀介质), 面分布
- 可能出现在整个介质中 (非均匀介质), 体分布

$$q'(\sigma', \rho')$$

■ 退极化场

- **极化电荷会产生电场**——附加场(**退极化场**)
- 极化过程中: 极化电荷与外场相互影响、相互制约, 过程复杂——达到平衡(不讨论过程)
- **平衡时总场**决定了介质的极化程度

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

极化的后果


$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \\ q'(\sigma', \rho') \\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \end{array} \right\} \text{描绘极化}$$

- 三者从不同角度定量地描绘同一物理现象——介质极化。
- 它们间必有联系，这些关系——电介质极化遵循的规律。

二、P与极化电荷的关系

1) **P**与 ρ_e' 关系: 以位移极化为模型讨论

$$\mathbf{P}_{\text{分子}} = q\mathbf{L}, \quad \mathbf{P} = n\mathbf{p}_{\text{分子}} = nq\mathbf{L}$$

- 在介质中取一长 l 、底面积 dS 斜柱体;
- 其中 l 是平均分子正, 负电荷中心距;
- 设 l 矢量穿过 dS , 每个分子对 dV 内电量贡献为 $-q$;
- dV 内电量可记为为 dq' , 分子数密度 n :

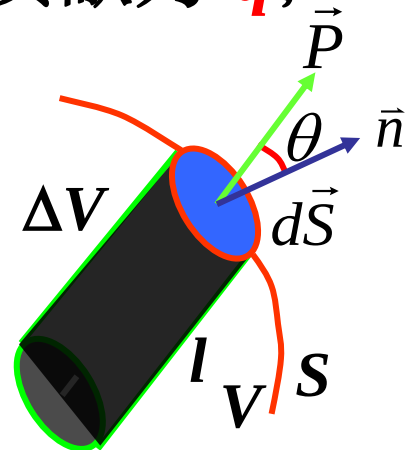
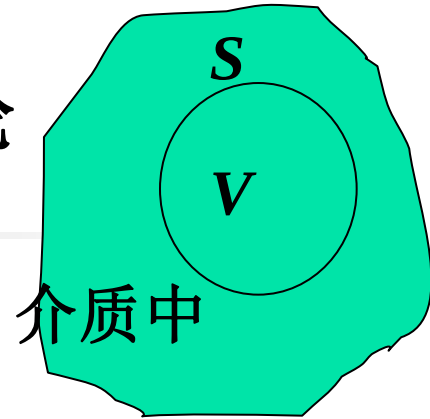
$$\begin{aligned} dq' &= -nq dV = -nq(l dS \cos \theta) \\ &= -nq\mathbf{L} \cdot d\mathbf{S} = -\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned}$$

又 $dq' = \rho_e' dV$, 两右边相等,

故:

$$\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \rho_e' dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_e'$$



$$\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \rho'_e dV = -Q';$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho'_e$$

- **均匀介质**，均匀极化： $\mathbf{P}$ 是常矢量， $\rho'_e = 0$
- **非均匀介质**：非均匀极化， $\mathbf{P}$ 是空间位置矢量， $\rho'_e \neq 0$

请将上面的积分公式与E的高斯定理比较！

2) $\mathbf{P}$ 与 σ_e' 的关系

- 在介质分界面取一面元 ΔS
- 过 ΔS 作扁盒型高斯面， h 小

$$\therefore Q' = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} \text{向外为正}$$

$$\therefore \sigma_e' dS = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n} dS,$$

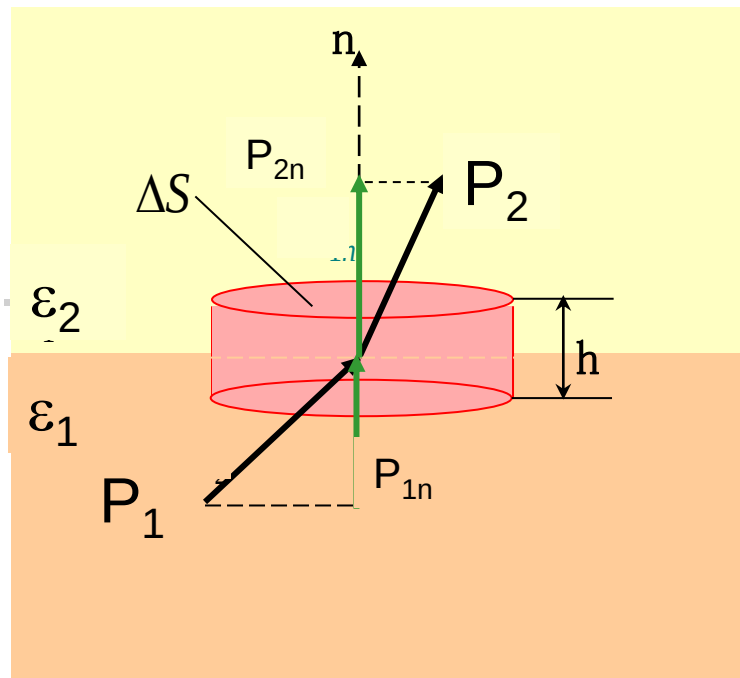
$\mathbf{n}$ 的方向是由介质1指向介质2

$$\sigma_e' = -(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}$$

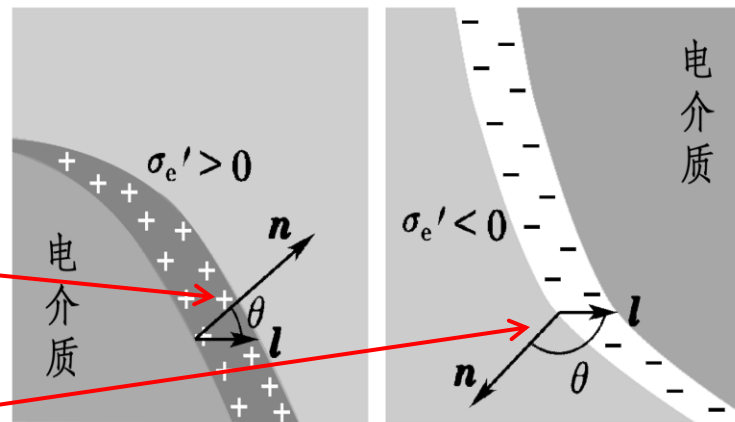
$$\sigma_e' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}, \mathbf{P}_2 = 0)$$

$$\theta < 90^\circ, \sigma_e' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n > 0$$

$$\theta > 90^\circ, \sigma_e' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n < 0$$



电介质2为真空时



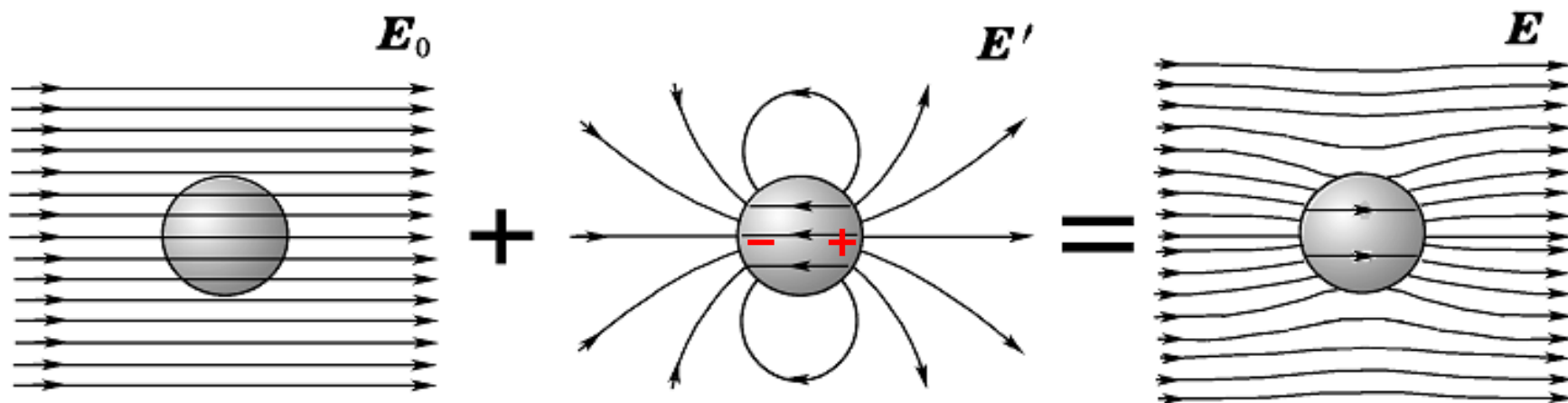
退极化场

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$\vec{E}_0 \longrightarrow$ 均匀介质极化 $\longrightarrow q'(\sigma'_e) \longrightarrow \vec{E}'$

影响

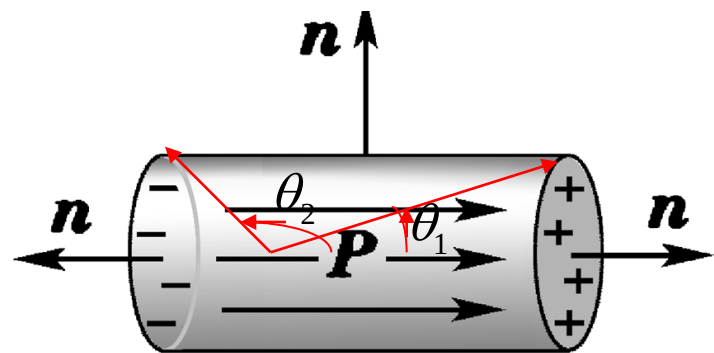
- 在电介质**内部**： $\mathbf{E}'$ 是由极化电荷产生的附加场，与外场 $\mathbf{E}_0$ 方向相反，起着减弱极化的作用，称作**退极化场**
- 在电介质**外部**：附加场**大部分**与外电场方向相同，加强



[例2.3] 沿轴**均匀极化**的电介质圆棒；棒长 **$2l$** ，半径 **R** ，极化强度矢量 **$\mathbf{P}$** 。求极化电荷的分布和体内轴线上的 **$\mathbf{E}'$** 。

[解]

1) $\mathbf{P}$ 是常数 $\rho'_e = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$



2) $\because \sigma'_e = \vec{P} \cdot \vec{n}; \therefore$ **左面** $\theta = \pi, \sigma'_e = -P$

侧面 $\theta = \frac{\pi}{2}, \sigma'_e = 0; \quad$ **右面** $\theta = 0, \sigma'_e = P$

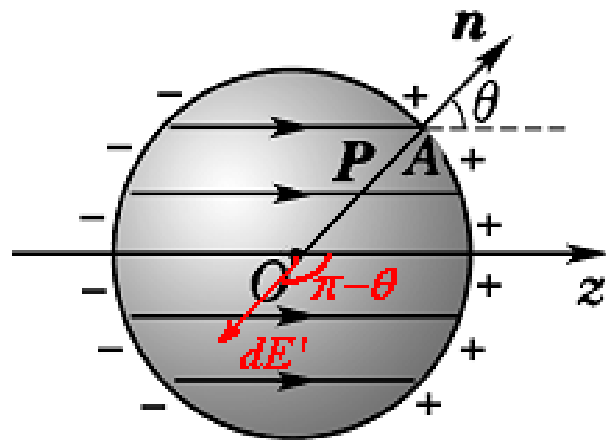
3) 退极化场等效与两圆盘产生的电场，由[例1.10]

可推出：
$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{2\varepsilon_0} (2 - \cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

[例2.4] 均匀极化的电介质球，半径为 R ，极化强度矢量 $\mathbf{P}$ ，求表面上极化电荷分布和球心处的退极化场

[解] (1) $\rho'_e = -\nabla \cdot \bar{\mathbf{P}} = 0$ ；球关于 z 轴旋转对称，其表面任意一点的 σ'_e 只与 θ 有关，则有：

$$\sigma'_e = P \cos \theta \begin{cases} \text{右半球, } \theta < 90^\circ, \sigma'_e > 0 \\ \text{左半球, } \theta > 90^\circ, \sigma'_e < 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2}, \sigma'_e = 0 ; \text{ 当 } \theta = 0, \pi, |\sigma'_e| \text{ 最大} \end{cases}$$



(2) **球心退极化场**：(取球面小面元 dS ，极化电荷为 dq')

$$dq' = \sigma'_e dS = P \cos \theta dS = P \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$d\bar{\mathbf{E}}' = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{R^3} \vec{R} \quad \bar{\mathbf{E}}' = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\bar{\mathbf{E}}' = -\frac{\bar{\mathbf{P}}}{3\epsilon_0}$$

三、P与E的关系

■ 极化规律： $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$

- 电介质内任一点的 $\mathbf{P}$ 是由在该点的总电场 $\mathbf{E}$ 决定的。
- 不同的电介质极化规律不同，由实验来测定。

■ 介质分类：

根据介质极化规律的不同，可将介质分为：

- 均匀线性各向同性电介质
- 各向异性电介质
- 铁电体
- 永电体

■ 各向同性电介质

- **P和E方向相同**，且有简单的正比关系

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

- 电极化率 $\chi_e \geq 0$ ，如果与空间位置无关，为**均匀介质**
- 当**场强不是很大**是， χ_e 与E无关，为**线性介质**
- 当**场强很大**时， χ_e 与E有关，为**非线性介质**

■ 各向异性电介质

- **P与E不平行**，关系较为复杂；
- χ_e 常表示为**张量形式**，称做**极化率张量**；
- 对**线性介质**，极化率张量与E无关，且为**对称张量**：

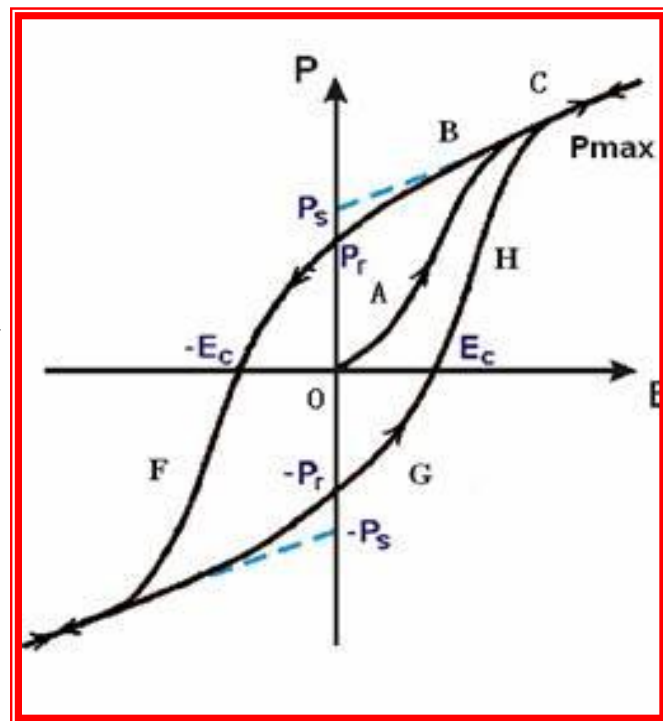

$$\begin{cases} P_x = (\chi_e)_{xx} \varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{xy} \varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{xz} \varepsilon_0 E_z, \\ P_y = (\chi_e)_{yx} \varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{yy} \varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{yz} \varepsilon_0 E_z, \\ P_z = (\chi_e)_{zx} \varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{zy} \varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{zz} \varepsilon_0 E_z. \end{cases}$$

对称张量，即 $(\chi_e)_{xy} = (\chi_e)_{yx}$ ， $(\chi_e)_{xz} = (\chi_e)_{zx}$ ，
 $(\chi_e)_{yz} = (\chi_e)_{zy}$ 。

■ 铁电体

- 极化状态**不仅**决定于电场，**还与极化历史有关**；
- 铁电体极化过程中极化强度矢量 P 随外场的变化曲线是**非线性的**，出现**电滞回线**，有剩余极化强度；
- 极化强度 P 和电场强度 E 有复杂的非线性关系， χ_e **不是常量**，它随 E 变，最大可达**几千**；
- 当温度超过某一温度时，铁电性消失，这一温度叫做**居里温度**；
- 铁电体同时也是**压电体**，但压电体不一定是铁电体；
- 典型的铁电体有酒石酸钾钠单晶、钛酸钡陶瓷等。

电滞回线

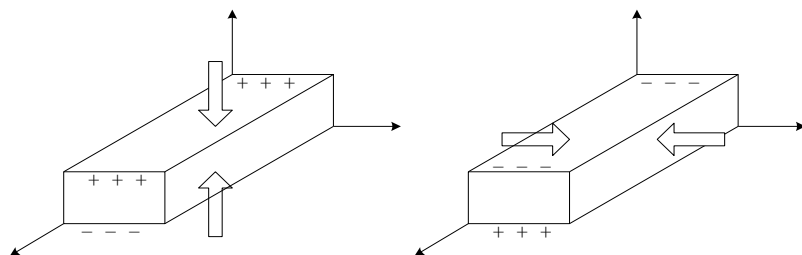


C: 饱和点

P_r : 剩余极化强度

■ 正压电效应

- 当**晶体**受到某固定方向**外力的作用**时，**内部就产生电极化现象**，同时在某两个表面上产生符号相反的电荷；
- 当**外力撤去**后，晶体又恢复到不带电的状态
- 当**外力作用方向改变**时，电荷的极性也随之改变；晶体受力所产生的电荷量与外力的大小成正比。



■ 逆压电效应

- 对晶体**施加交变电场**引起晶体机械变形的现象，又称**电致伸缩效应**。可应用于石英钟表、耳机、激发超声波等。

■ 驻极体（永电体）

- 一种具有**持久性极化**的固体电介质。
- 如当**蜡**和**松香**的**混合物**在外加的强电场中从熔融态固化后，再除去外电场时，混合物固体会长期保持极化状态
- 驻极体可以在周围空间产生电场，因此可以类比于**永磁体**的一种带电体。
- 室温下驻极体的极化状态可以长期保存，但在高温下则衰减得很快。
- 驻极体**可作为静电场的源**，如在电容式声电换能器中，可用驻极体代替电容的一个极板，从而省去了直流偏压。



小结：

■ P与E 是否成正比（线性与非线性）

- 凡 χ_e 不含E的介质——线性介质
- 凡 χ_e 含E的介质——非线性介质

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

■ 介质性质是否随空间坐标变 （空间均匀性）

- χ_e —与空间坐标无关：均匀介质；
- χ_e —坐标的函数：非均匀介质

■ 介质性质是否随空间方位变 （方向均匀性）

- χ_e —标量：各向同性介质；
- χ_e —张量：各向异性介质

■ 以上概念是从三种不同的角度来描述介质的性质

- 空气：各向同性、线性、一般是非均匀介质
- 水晶：各向异性、线性介质
- 酒石酸钾钠、钛酸钡：各向同性非线性介质——铁电体

电
极
化
率

[例2.5]平行板电容器间充满极化率为 χ_e 的均匀线性各向同性介质，极板自由电荷面密度为 σ_{e0} ，求介质的 σ'_e 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{E}$ 和电容 $\mathbf{C}$

[解] 关键是求 $\mathbf{E}$ ，注意： $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{E}'$ 和 $\mathbf{E}$ 均与极板垂直

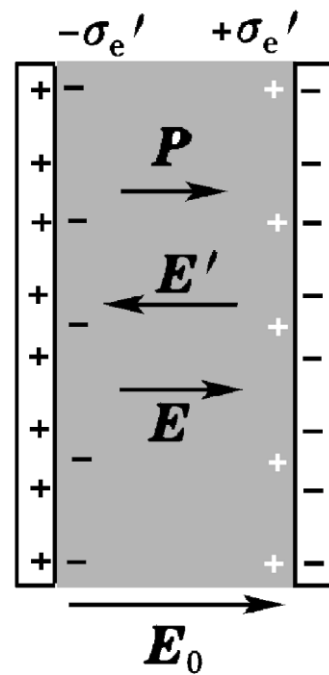
$$E = E_0 + E', \quad E_0 = \sigma_{e0} / \varepsilon_0, \quad E' = -\sigma'_e / \varepsilon_0 = -P / \varepsilon_0 = -\chi_e E$$

$$\therefore E = E_0 / (1 + \chi_e) = \sigma_{e0} / [(1 + \chi_e) \varepsilon_0], \quad E' = -\chi_e E$$

$$\sigma'_e = P = \chi_e \varepsilon_0 E = \frac{\chi_e \sigma_{e0}}{1 + \chi_e}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_{e0} S}{Ed} = \frac{(1 + \chi_e) \varepsilon_0 S}{d} = (1 + \chi_e) C_0 = \varepsilon_r C_0$$

令 $\varepsilon_r \equiv (1 + \chi_e)$ ，称相对介电常数



说明：束缚电荷 $\xrightarrow{?}$ 极化电荷 否！

- 用摩擦等方法使绝缘体带电：
 - 绝缘体上的电荷——束缚电荷，但不是极化电荷！
 - 实际上它是一种束缚在绝缘体上的自由电荷；
 - 并非起源于极化，因而可以转移与自由电荷中和。
- 介质在随时间变化的电场作用下：
 - 由极化产生的极化电荷 $\longrightarrow$ 束缚电荷(约束在原子范围内)，
 - 不可能转移与自由电荷中和
 - 但它能变化并产生电流 $\longrightarrow$ 极化电流，由 $\partial \mathbf{P} / \partial t$ 决定
- 自由、束缚是指电荷所处的状态；
- 感应、极化或摩擦起电是指产生电荷的原因。

§ 2.6 电介质中静电场的基本定理

■ 高斯定理

真空中静电场的基本定理

■ 环路定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S \text{ 内}} q,$$

■ 电位移线

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

■ 举例应用

- 电介质在外场中会被极化，出现极化电荷
- 不但自由电荷要激发电场 $\mathbf{E}_0$ ，电介质中的束缚电荷同样也要在它周围空间激发电场 $\mathbf{E}'$ （无论电介质内部或外部）
- 由电场强度叠加原理，在有电介质时，某点的总电场强度

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

一、高斯定理

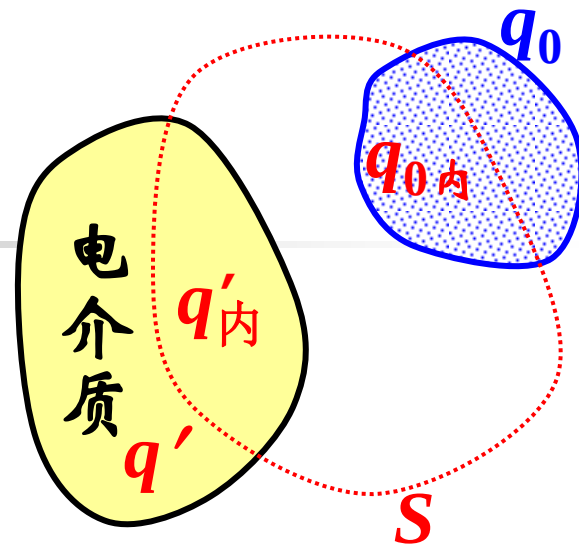
逻辑、合理的推广：

$$\left. \begin{array}{l} q_0 \rightarrow \mathbf{E}_0 \\ q' \rightarrow \mathbf{E}' \end{array} \right\} \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sum q_{0\text{内}} + \sum q'_{\text{内}})$$

$$\text{又 } Q' = \sum q'_{\text{内}} = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\Rightarrow \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{0\text{内}} - \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\therefore \oiint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0\text{内}}$$

令 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 称 $\mathbf{D}$ 为电位移矢量

单位是 C/m^2 (库每平方米)

于是有:

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_{0\text{内}} = Q_0$$

电介质中的
高斯定理

对线性各向同性介质: $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$

$$\therefore \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$\varepsilon \equiv \varepsilon_r \varepsilon_0 = (1 + \chi_e) \varepsilon_0$ ε 为绝对介电常数,
 ε_r 为相对介电常数。

如果是**带电体**，令 ρ_{e0} 为自由电荷密度， ρ'_e 为极化电荷密度， ρ_e 为总电荷密度：

$$\rho_e = \rho_{e0} + \rho'_e$$

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho_e dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V (\rho_{e0} + \rho'_e) dV$$

由前结果 $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_{e0} dV = Q_0$

可得电介质中**高斯定理微分表达式**：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{e0} + \rho'_e), \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{e0}$$

二、环路定理

- 电介质的存在，只是增加了一些新的场源(电荷)
- 电介质的存在，并没有改变电场的基本性质
- 静电平衡时，自由电荷和极化电荷满足库仑定律，产生的电场都是静电场
- 总电场的保守场性质不变，所以仍满足环路定理：

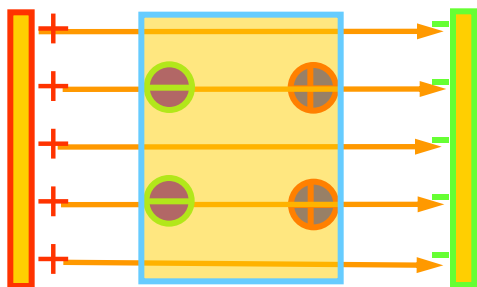
$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\text{其中 } \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$$

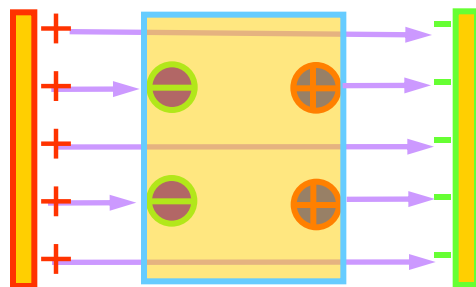
介质中静电场
仍然是一个无
旋的保守场。

三、电位移线

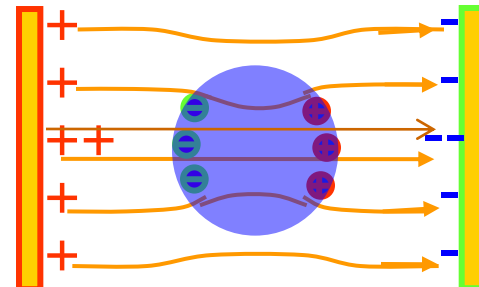
- **D向量**，是表述有电介质时电场性质的一个**辅助量**，在有电介质时的电场中，各点的场强都对应着一个电位移矢量。
- **仿照电场线的画法**，可以作一系列**电位移线**，线上每点的切线**方向**就是该点电位移矢量的方向，并令垂直于线单位面积上通过的线条数，在数值上等于该点电位移**D的大小**。
- **D线和E线**：



电位移线（由
 ρ_{e0} 决定）



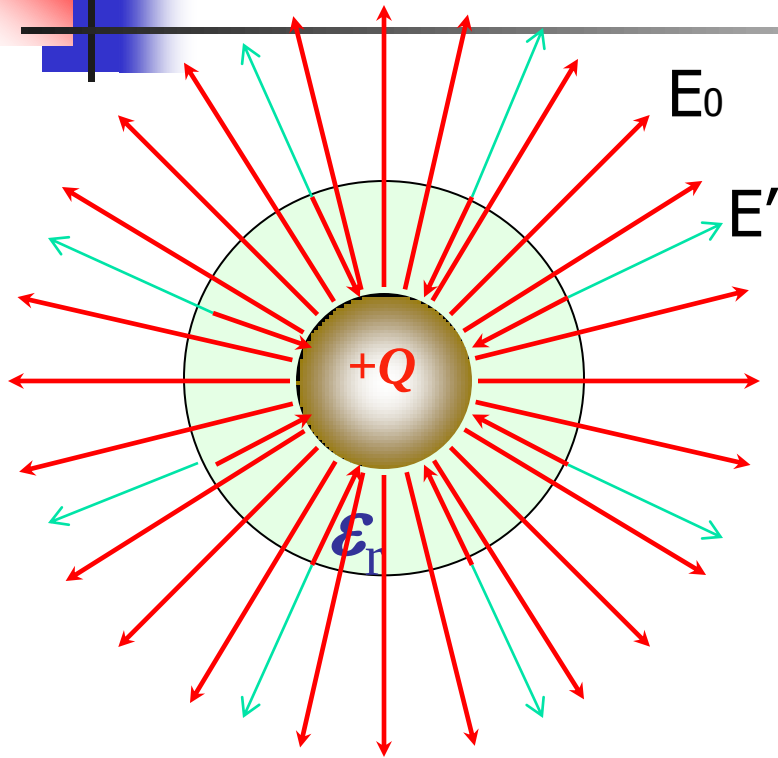
电场强度（由
 $\rho_{e0} + \rho'_e$ 决定）



线性非均匀介质的**D**线

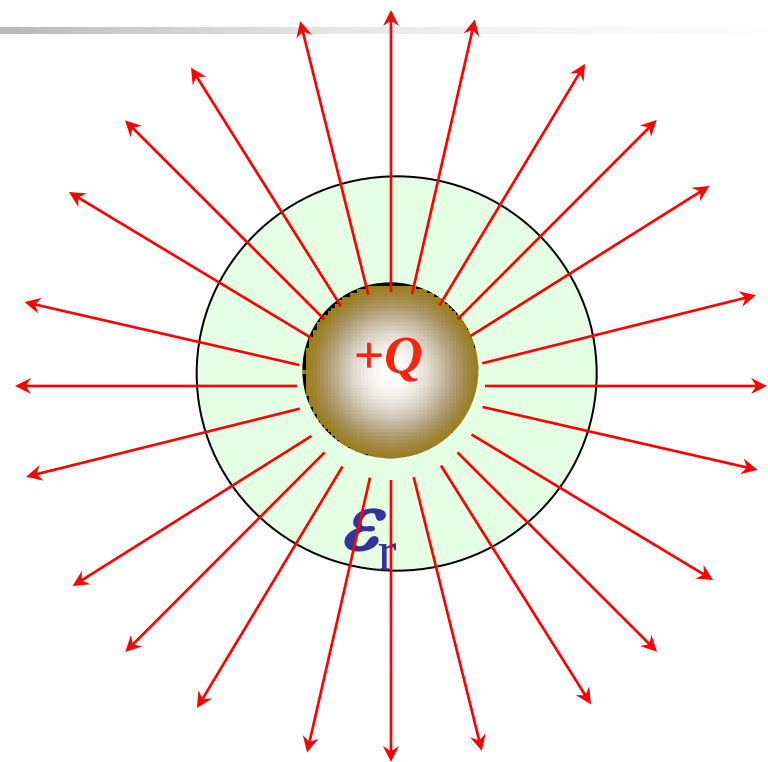
线性均匀各向同性介质情况

E 线



电力线(E 线)不但与自由电荷有关, 而且与束缚电荷有关

D 线



电位移线(D 线)却只与自由电荷有关

四、举例

[例2-6-1]证明均匀线性各向同性介质内 $\rho_0=0$ 处必有 $\rho'=0$ 。

[解] $\because \Delta q'_{\text{内}} = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$

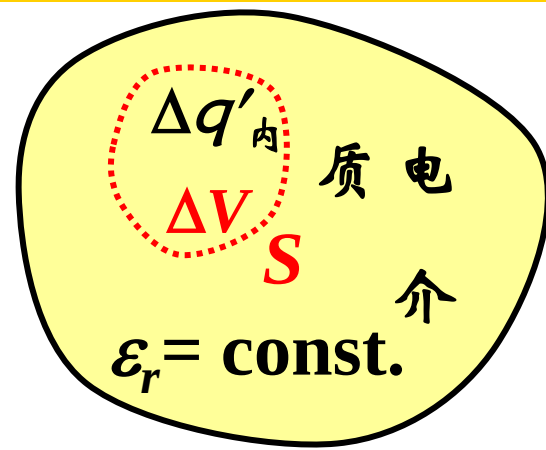
$$\text{又 } \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \varepsilon_0 \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \vec{D}$$

$$\Delta q'_{\text{内}} = -\oiint_S \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \vec{D} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right) \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right) \cdot \Delta q_{0\text{内}}$$

$$\rho' = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q'_{\text{内}}}{\Delta V} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right) \cdot \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{0\text{内}}}{\Delta V}$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right) \rho_0$$

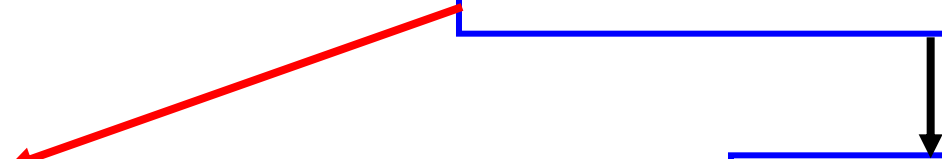
$$\therefore \rho_0 = 0 \rightarrow \rho' = 0。$$



[例2-6-2]求相对介电常数为 ϵ_r 的无限大均匀线性各向同性电介质中点电荷 q 的场分布。

[解]：已知介质性质、自由电荷分布， q 的场是球对称场，可以先求 D ，以电荷为球心，作球形高斯面：

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= q \\ D \cdot 4\pi r^2 &= q \end{aligned} \rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \rightarrow E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{q}{4\epsilon\pi r^2} = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$



$$U = U_0 / \epsilon_r \rightarrow C = \epsilon_r C_0 \quad D = \epsilon_0 E_0$$

介质内场强削弱到 $1/\epsilon_r$ ；电容增加为 ϵ_r 倍， ϵ_r 又称为电容率。

[例2-6-3] 导体球 R_1 、 Q_0 和均匀线性各向同性介质球壳 R_2 、 ϵ_r . 求 E 、 σ'_e 、 U

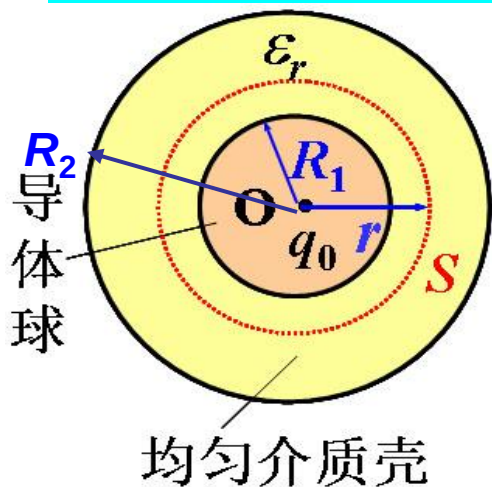
[解] 已知介质性质、自由电荷分布，一维对称问题：

1) 利用高斯定理： $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 4\pi r^2 = Q_0$ ，分三个区分别讨论：

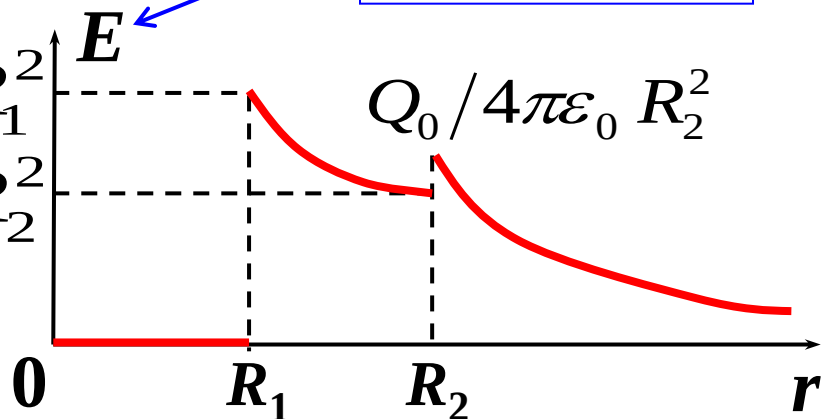
$$\begin{aligned} \bar{D} &= 0 & \bar{E}_I &= 0 & (r < R_1) \\ \bar{D} &= \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi r^3} & \bar{E}_{II} &= \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi \epsilon r^3} & (R_1 \leq r \leq R_2) \\ \bar{D} &= \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi r^3} & \bar{E}_{III} &= \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} & (r > R_2) \end{aligned}$$

思考

为什么 E 的曲线不连续？

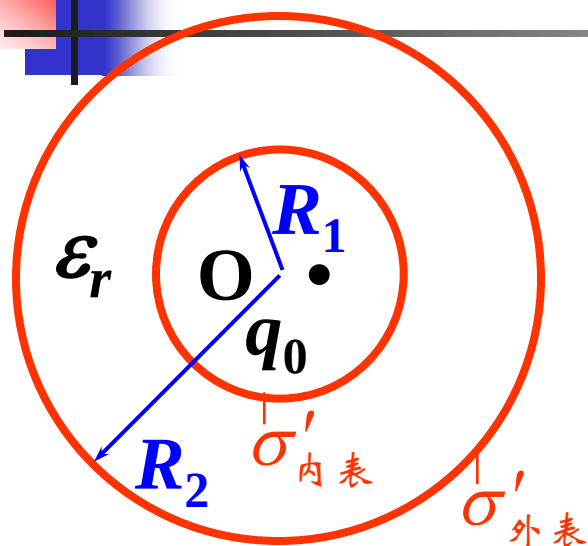


$$\begin{aligned} &Q_0 / 4\pi \epsilon R_1^2 \\ &Q_0 / 4\pi \epsilon R_2^2 \end{aligned}$$



2) 下面求极化电荷 q' 的分布：

在介质内部： $\varepsilon_r = \text{常数}$ ， $\rho_0 = 0 \Rightarrow \rho'_e = 0$



$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 \vec{r} / 4\pi \varepsilon r^3$$

$$\sigma'_{\text{内表}} = P_n \big|_{r=R_1} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 / 4\pi \varepsilon R_1^2$$

$$\sigma'_{\text{外表}} = P_n \big|_{r=R_2} = (\varepsilon - \varepsilon_0) Q_0 / 4\pi \varepsilon R_2^2$$

$$\text{即 } \sigma'_{\text{内表}} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \sigma_{e0} / \varepsilon$$

3) 导体球的电势：

$$U = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_{II} \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_{III} \cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 R_2}$$

小结:

真空

有介质

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S\text{内}} q$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

总电荷(自由、极化)

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S\text{内}} q_0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

自由电荷

- 各向同性、线性介质中 $\vec{D}$ 正比于 $\vec{E}$;
- 普遍情况下,两者关系不简单,不一定成正比关系。



§ 2.7 边值关系和唯一性定理

一、边值关系

电场强度 电位移矢量 电势

二、唯一性定理

三、应用举例

一、边值关系

- 电场内存在多种介质→介质间的**交界面**→极化电荷
- 介质未充满电场空间→导体和介质的**交界面**→极化和自由电荷
- **交界面**的存在会影响整个空间的电场分布
→研究电场在交界处的行为十分重要
- 将**电场的基本方程**用到交界面上，研究界面两边电场改变的一般规律，即“**边值关系**”。

(1) 电场强度

在介质交界面取一较小的矩形环路用环路定理:

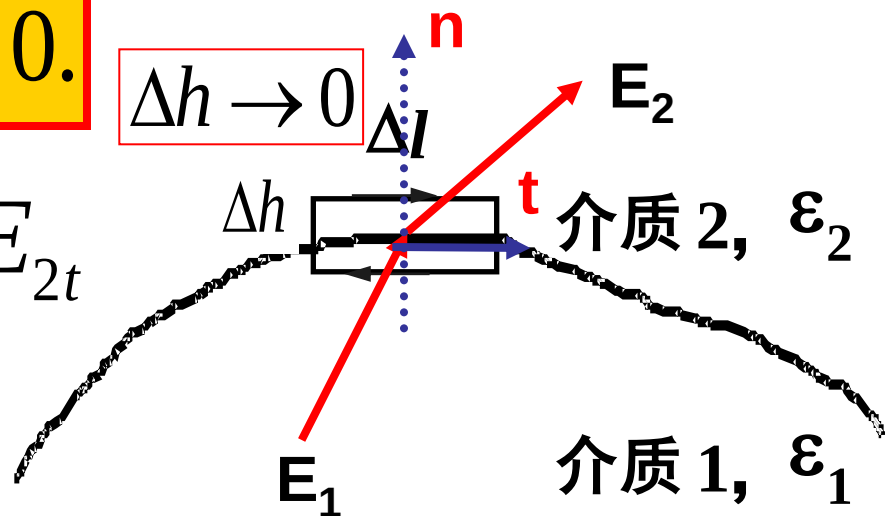
$$\oint_{\text{矩形}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot (-\Delta l \cdot \vec{e}_t) + \vec{E}_2 \cdot (\Delta l \cdot \vec{e}_t) \\ = (E_{2t} - E_{1t})\Delta l \equiv 0 \quad \longrightarrow \quad E_{1t} = E_{2t}$$

界面两边电场强度的切向分量总是相等。

或写成 $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0.$

$$\because D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t}; \quad D_{2t} = \varepsilon_2 E_{2t}$$

$$D_{1t} / D_{2t} = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$$



(2) 电位移矢量

利用高斯定理，跨界面作柱形高斯面：

$$\oiint_{\text{柱面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{D}_2 \cdot (\Delta S \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{D}_1 \cdot [\Delta S \cdot (-\mathbf{n})] - \mathbf{n}: 1 \rightarrow 2$$

$$= (D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \sigma_0 \Delta S \longrightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$$

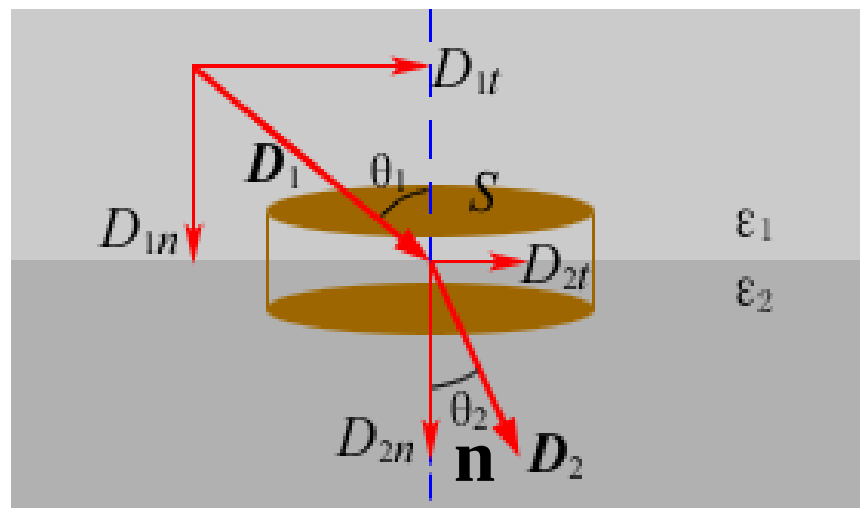
■ 如在电介质界面上，一般 $\sigma_0 = 0$ ，即无自由电荷，所以：

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{或} \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0$$

$$\because (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \cdot \vec{n} = \sigma'_e \quad (+)$$

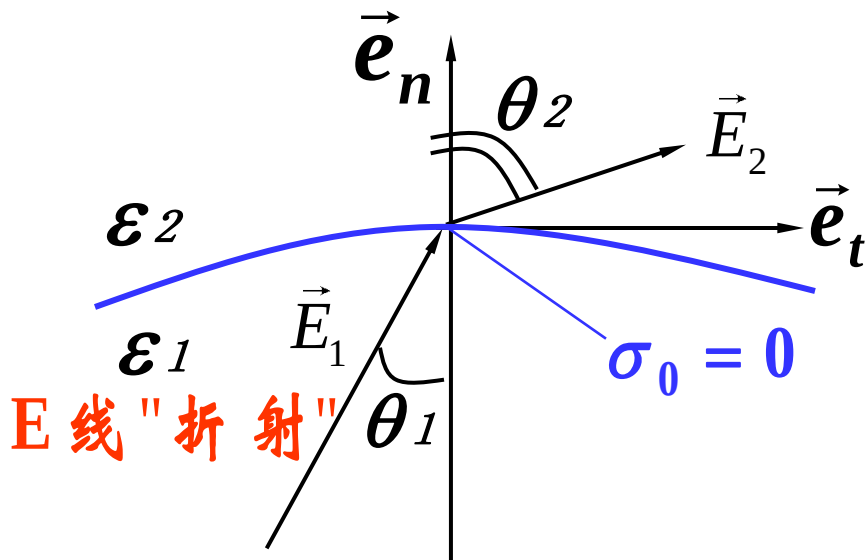
$$\because (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_e / \varepsilon_0$$

σ_e 为总面电荷密度



电场线在介质界面上的“折射”

$$\because \sigma_0 = 0, \therefore \text{则 } D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n},$$



$$\text{又 } E_{1t} = E_{2t}$$

$$\therefore \frac{E_{1t} / E_{1n}}{E_{2t} / E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

电场线在穿过介质界面时会产生类似光线折射的现象

若 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, 则 $\theta_1 < \theta_2$

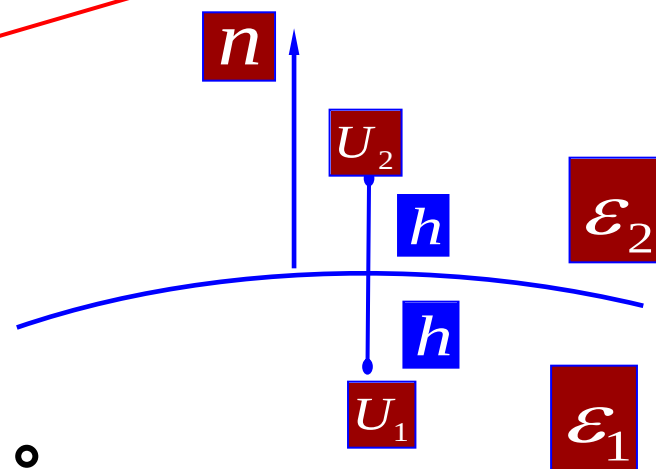
(3) 电势

- 当 $h \rightarrow 0$ 时，两点的电势差为0，即：

$$U_1 = U_2$$

介质界面两侧电势总是连续的。

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} U_1 - U_2 = 0$$



小结

1、**E 的切向分量总是连续的**



$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \end{cases}$$

■ 界面一点上的法线方向只有一个，
而该点的切线方向却有无数多个，
结论对任一切线方向成立

2、对**无自由电荷**的界面，



D 的法向分量连续

$$\begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \end{cases}$$

3、**介质界面两侧的电势总是连续的**



$$U_1 = U_2$$

4、**极化强度矢量和极化面电荷**



$$\sigma'_e = P_{1n} - P_{2n}$$

二、唯一性定理

■ 求解静电场问题

- 给定空间电荷的分布,如何知道空间各处的电场?
- 原则:库仑定律+叠加原理→空间各点电场强度 E

■ 实际情况: 有导体时

- 要知道每个导体表面的面电荷分布很困难;
- 即使知道 σ_e , 但 E 是矢量, 使得计算极为繁杂;
- 容易确定的是每个导体的电势或者总电量。

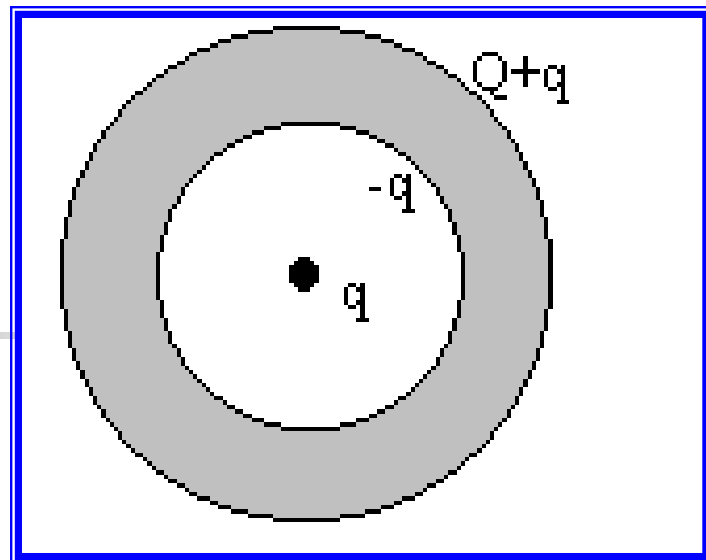
■ 求解思路: 先求得 U , 再利用 $E = -\nabla U$ 得 E

基本方程：

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e / \varepsilon_0, \quad \mathbf{E} = -\nabla U.$$

$$\therefore \nabla^2 U = -\rho_e / \varepsilon_0 \rightarrow \text{泊松方程}$$

$$\text{如果 } \nabla^2 U = 0 \rightarrow \text{拉普拉斯方程}$$



- 将问题**转换**为求解一个标量函数的二阶偏微分方程；
- 但仅有此方程不能确定空间U分布，**还需边界条件**。

典型的静电场问题：即在给定一定**边界条件**下，求解泊松方程的问题。

对于静电场，给定什么样的条件，空间存在确定的电场解？ —— **唯一性定理**

带电导体系——唯一性定理

- 当给定电场的边界条件，即给定包围电场空间的边界面 S 上的电势 U_S ，给定 S 内各导体的形状、大小及各导体之间的相对位置，同时再给定下列两条件之一：
 - (1) S 面内每个导体的电势 U_i
 - (2) S 面内每个导体上的总电量 q_i
(其中 $i=1,2,\dots$ 为导体的编号)
- 则在以 S 为边界面的空间内由高斯定理和环路定理确定的静电场解是唯一的。

含电介质体系——唯一性定理

- 当**给定**空间**边界面** S **上的电势** U_S ，**给定** S 面内**各均匀介质**按区域分布的情况和各电介质的介电常数 ϵ_i ，**给定** S 内各**导体**的形状、大小及各导体之间的相对位置，**同时再给定**下列两条件之一：
 - (1) S 面内每个导体的电势 U_i
 - (2) S 面内每个导体上的总电量 q_i
(其中 $i=1,2,\dots$ 为导体的编号)
- 则边界面 S 所包围的空间内**静电场解是唯一的**。

唯一性定理的含意

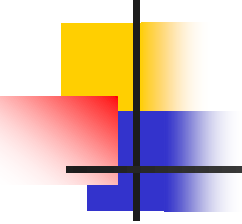
满足一定的条件和边界条件的、存在于空间的电场分布应该是唯一的,即给定这些条件后,不可能存在不同的静电场分布。

■ 证明:

- 利用反证法论证见书中**P56**
- 理论证明在电动力学中给出

几点说明

- 唯一性定理提出了**定解的充分必要条件**。
 - 求解时，**判断**问题的条件、边界条件是否足够？
如果足够，则可**断定解是唯一的**。
 - 不同的方法得到的**解**在形式上可能不同，但**等价**。
- 唯一性定理对于**解决实际问题**有着重要的意义。
 - 对于许多实际问题，往往需要**根据给定的条件作一定的分析，提出尝试解**。
 - 如果所提出的**尝试解**满足唯一性定理所要求的条件，它就是该问题的唯一正确的解。



三、应用举例

研究**分区均匀线形各向同性介质**的电场求解问题：

- 介质**界面与**电场线重合的情况
- 介质**界面与**等势面重合的情况
- 其他情况：电动力学方法处理

介质界面与电场线重合

- 见右下图，带电量为 Q_0 的球形电容器。 $\mathbf{E}$ 与介质界面重合，则 $\mathbf{P}$ 在界面上没有法向分量，则两种介质分界面上极化面电荷为0。

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\sigma'_e = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}$$

- σ'_e 只可能存在于介质和导体的边界面上。
- 而导体静电平衡要求导体内的 $\mathbf{E}$ 恒为 $\mathbf{0}$ ，所以导体表面的自由电荷会自动调整，从而维持总电荷面密度分布形式不变：

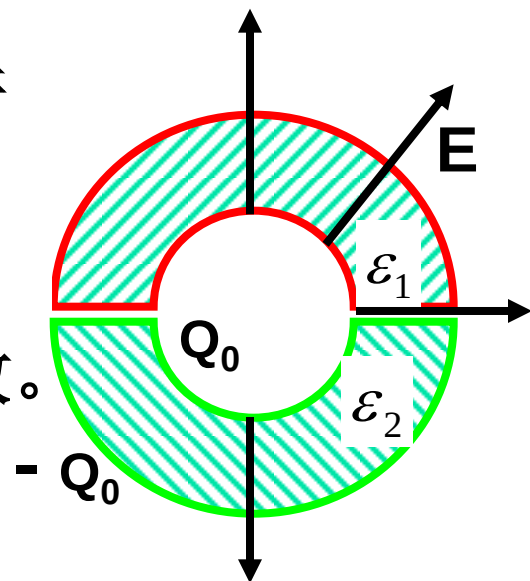
$\therefore$ 可知介质中 $\mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}_0$ ，其中 α 是个常数。

- 为确定 α 因子，我们要用到高斯定理：

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \alpha \iint_{S_i} \varepsilon_i \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = Q_0$$

$$\alpha \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = Q_0$$

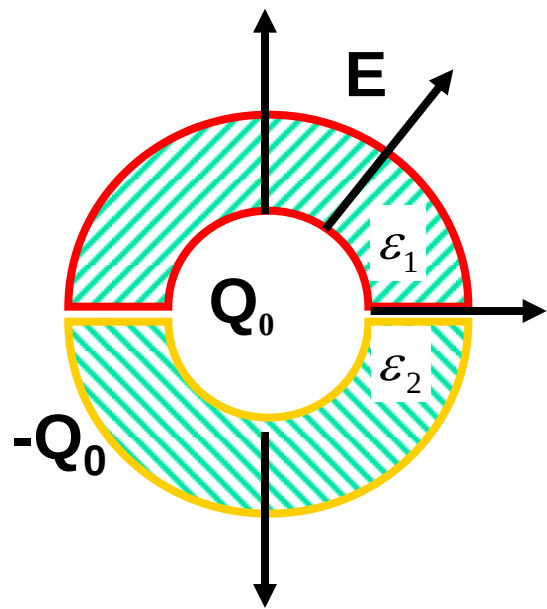
式中 $\mathbf{S}$ 为包含某导体面的高斯面， $\mathbf{S}_i$ 是 $\mathbf{S}$ 的一部分，它位于第 i 种介质之中； Q_0 为该导体所带的自由电荷量，在真空中所产生的电场为 $\mathbf{E}_0$ 。



■ 对 E_0 一维对称性问题，则 E 也有一维对称性，不必引入 α ，使得问题简化。这时可利用高斯定理直接计算电场强度 E 。

【例2-7-1】球形电容器带电量 Q_0 ，极板间充满介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 的两种介质，求介质中的 D 和 E

【解】介质界面与电场线重合，且 E 是一维对称性问题，所以可以直接利用高斯定理：



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi r^2 (D_1 + D_2)$$
$$= E(2\pi r^2 \epsilon_1 + 2\pi r^2 \epsilon_2) = Q_0,$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_0 \vec{r}}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^3},$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E} = \frac{\epsilon_1 Q_0 \vec{r}}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^3},$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E} = \frac{\epsilon_2 Q_0 \vec{r}}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^3}.$$

[例2-7-2]平行板电容器，带电 Q_0 ，板间距 d ，长度 a ，宽度 $b=b_1+b_2$ 。介电常数为 ε_1 和 ε_2 。求 C 和极板上自由电荷 σ_e

[解]介质界面与电场线重合，且 $\mathbf{E}$ 是一维对称性问题，所以可以直接利用高斯定理：

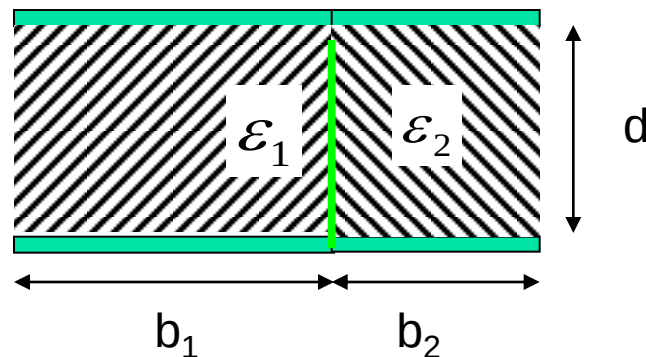
$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = E(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a = Q_0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a},$$

$$C = \frac{Q_0}{Ed} = \frac{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a}{d}, \quad \sigma_{e1} = D_{n1} = \varepsilon_1 E = \frac{\varepsilon_1 Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a},$$

$$\sigma_{e2} = D_{n2} = \varepsilon_2 E = \frac{\varepsilon_2 Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a}.$$

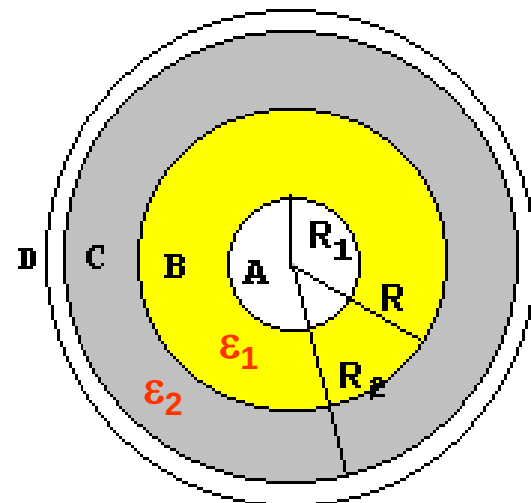
自由电荷 $\sigma_{e1} \neq \sigma_{e2}$

自由电荷在极板上分布是不均匀的，但这种不均匀性正好由极化电荷所补偿，总面电荷密度是均匀分布的。电容器内电场仍是均匀分布的。

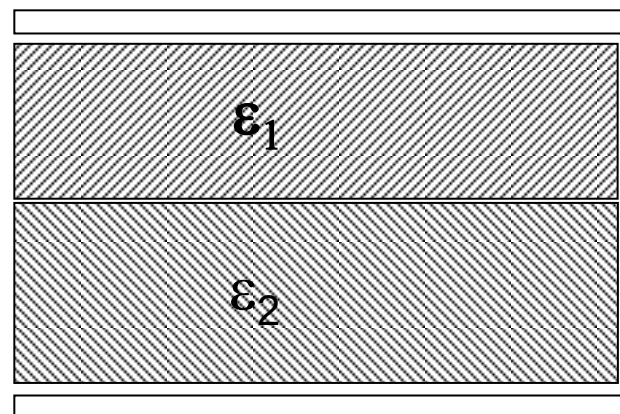


介质界面与等势面重合

- 介质界面与等势面重合 $\longleftrightarrow$ 介质界面与电场线垂直，见右两图问题
- 由D的法向分量连续，猜介质中 $D = \epsilon_0 E_0$ ，可证明 D 和 $\epsilon_0 E_0$ 同时满足高斯定理和环路定理，见P59。
- E_0 为自由电荷的电场，其计算完全等同于真空中的静电场。
- 处理步骤：
 - 首先去掉介质，计算自由电荷产生的电场 E_0
 - 利用 $E_i = \epsilon_0 E_0 / \epsilon_i$ 求出 E_i
($\because D = \epsilon_i E_i$, 且 $D = \epsilon_0 E_0$)



球型电容器



平行板电容器

[例2-7-3]平行板电容器，两板间充满厚度分别为 d_1 、 d_2 ，介电常数为 ε_1 、 ε_2 的两层介质；板间电压为 U 。求
1) 两板间的电场； **2)** 介质分界面处的总面电荷密度；
3) 介质分界面处的自由面电荷密度？

[解] 介质界面与电场线垂直， $\mathbf{E}_i = \mathbf{D} / \varepsilon_i = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 / \varepsilon_i$

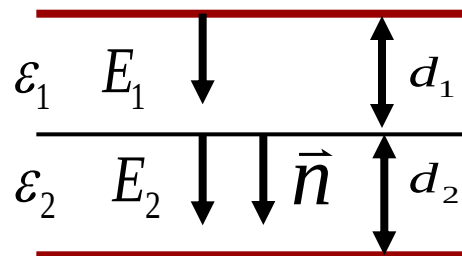
$$1) \text{ 已知: } U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \varepsilon_0 E_0 d_1 / \varepsilon_1 + \varepsilon_0 E_0 d_2 / \varepsilon_2,$$

$$\therefore E_0 = \frac{U}{\varepsilon_0 (d_1 / \varepsilon_1 + d_2 / \varepsilon_2)} \Rightarrow E_1 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_2}.$$

$$2) \quad \vec{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \sigma_t / \varepsilon_0, \quad \sigma_t = \varepsilon_0 (E_2 - E_1)$$

$$3) \quad \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_0,$$

$$\because \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D}_1 = \vec{D}_2, \quad \therefore \sigma_0 = 0.$$



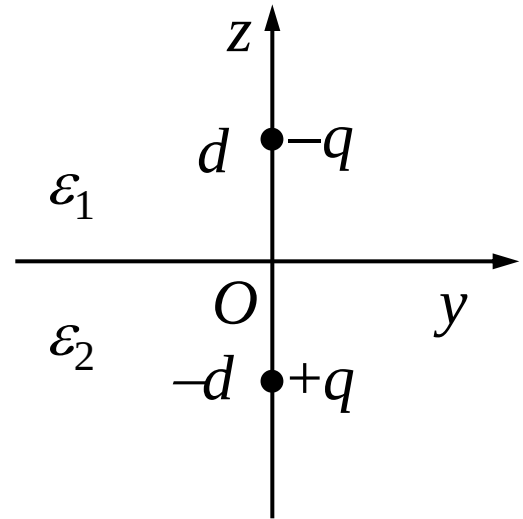
[例2.7.4]如右下图所示，一无限大平面（ $z = 0$ ）将介电常量分别为 ε_1 和 ε_2 的介质隔开，在 z 轴上 $z = \pm d$ 的位置分别放置点电荷 $\mp q$ ，求空间电场分布。

[解] 当去掉介质， xoy 平面恰好为两点电荷的电场的等势面；又 $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{E}$ 方向相同，因此，本题属于介质界面与等势面重合的情况。先求：

$$E_{0x} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} \right\}$$

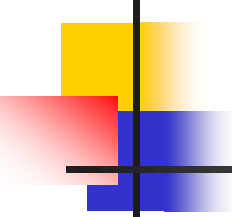
$$E_{0y} = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} \right\}$$

$$E_{0z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{z+d}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} - \frac{z-d}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} \right\}$$



$$\because \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$$

$$\therefore \mathbf{E} = \mathbf{D} / \varepsilon_1 = (\varepsilon_0 / \varepsilon_1) \mathbf{E}_0 \quad (z > 0), \quad \mathbf{E} = \mathbf{D} / \varepsilon_2 = (\varepsilon_0 / \varepsilon_2) \mathbf{E}_0 \quad (z < 0)$$



其他情况

- 介质界面与电场线和等势面都不重合，一般用：**电动力学**方法处理
- 对于某些具有**特定几何形状**的介质面的问题，可以利用**电像法**求解

* § 2.8 电像法

定义:

- 求解静电场问题的特殊方法，由W.汤姆孙于1848年提出。用于计算一定形状导体面附近的电荷所产生的静电场。

原因:

- 在电荷的附近出现导体面(或介质分界面)时，这些面对电场有影响(感应电荷或极化电荷)，求解困难。

方法:

- 电像法就是利用已经熟悉的静电学知识，通过在这些面的另一侧适当位置，设置电量适当的假想电荷(称为像电荷)，保证场的边界条件得到满足，等效地代替实际导体或电介质界面上的感应电荷与极化电荷求解。

物理:

- 根据静电唯一性定理，在求解区域中，源电荷与像电荷产生的电场满足边界条件，它就是实际存在的电场。

一、范围步骤

基本思路

- 用假想的像电荷代替边界上的感应电荷与束缚电荷；
- 保持求解区域中场方程和边界条件的不变。

使用范围

- 区域内只有一个或者几个点电荷。点电荷个数有限；
- 区域的边界是导体或者介质。界面几何形状较规范。

解题步骤

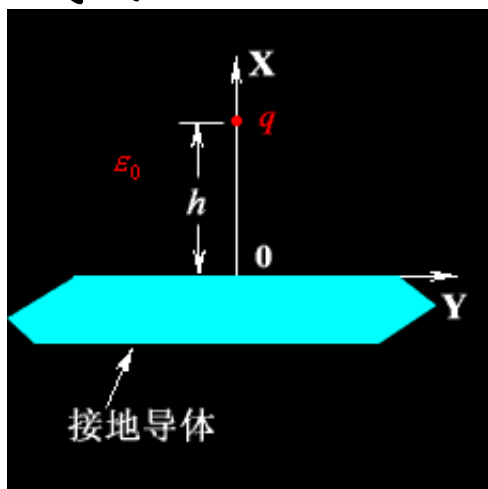
- 先确定像电荷的大小和位置，必须满足原边界条件；
- 去掉界面，按原电荷和像电荷求所要求区域的电场；
- 再求边界上的感应电荷与束缚电荷；
- 最后求电场力。

二、应用举例

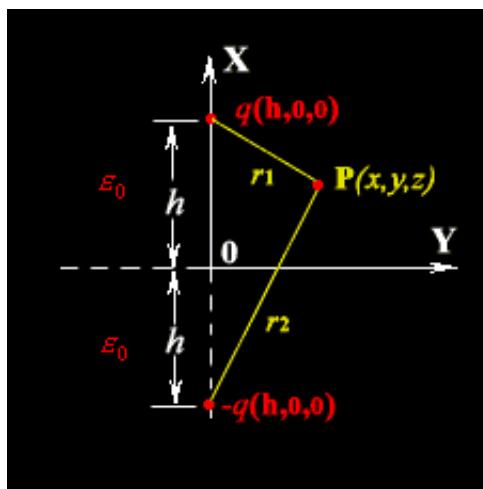
[例2-8-1]距无限大**接地导体板**为 **h** 处有一点电荷 **q** 。求：点电荷一侧场的分布，板上的电荷分布以及电荷 **q** 所受的力。

分析：边界条件是YOZ面为零电位面。根据已有的知识，用位于导体平面**下方 **h**** 处的**镜像电荷 **$-q$**** 代替导体平面上的感应电荷，**可满足给定的边界条件**。

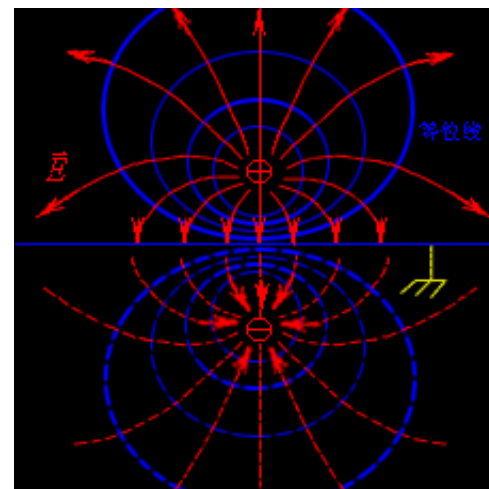
解题：去掉导体面，用原电荷和像电荷求解导体上方区域场。



接地导体面上方有点电荷 q



镜像电荷 $-q$



点电荷的平面镜像

上半空间电位:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2 + (x-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2 + (x+h)^2}} \right]$$

电场强度: $E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$; 当 $x=0$, 即面板上:

$$E_y|_{x=0} = 0, E_z|_{x=0} = 0, E_x|_{x=0} = -qh/2\pi\epsilon_0(h^2 + R^2)^{3/2}$$

感应电荷: $\sigma_e = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -qh/2\pi(h^2 + R^2)^{3/2}$

$$R^2 = y^2 + z^2$$

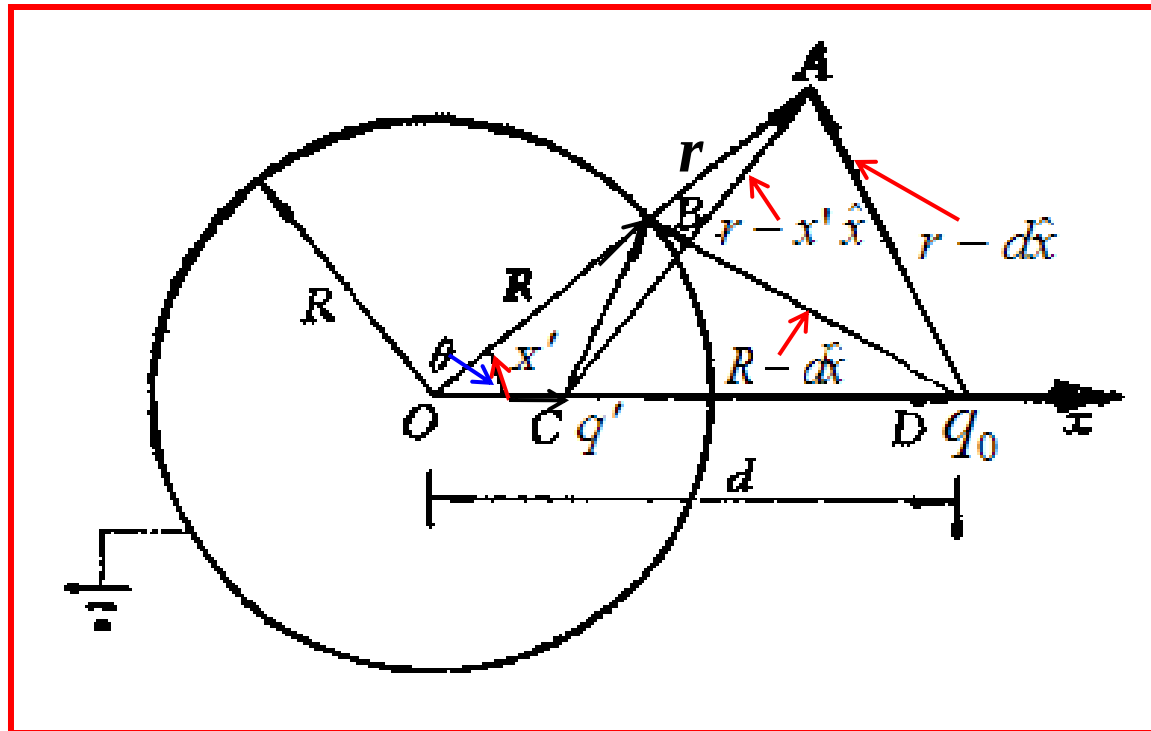
$$Q = \iint_S \sigma_e dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-qh}{2\pi(h^2 + R^2)^{3/2}} R dR d\varphi = \frac{qh}{(h^2 + R^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = -q = q'$$

电场力: $E_y|_{x=h} = 0, E_z|_{x=h} = 0, E_x|_{x=h} = -q/16\pi\epsilon_0 h^2,$

$$\vec{F} = q\vec{E} = q\vec{E}_x|_{x=h} = -q^2/16\pi\epsilon_0 h^2 \hat{x}.$$

***[例2-8-2]**真空中有一半径为 **R** 的**接地导体球**，距球心 **O** 为 **d** ($d > R$) 处有一点电荷 **q_0** ，求空间各点电势、电场和 **σ_e** 。

- **[分析]**：对称性分析，设导体球内距离球心 **O** 为 **x'** 的 **C** 点处，置一**像电荷 **q'**** 来代替导体球上的感应电荷，维持导体球面电位为零。
- **[解题]**：去掉导体球，用**原电荷**和**像电荷**求解**导体球外区域场**，**注意不能**用原电荷和像电荷求解导体球内区域场。步骤为：
 - 求解像电荷的大小和位置；
 - 求解电位、电场强度、感应电荷



■ 求解**镜像电荷的大小和位置**：将原导体球移去， q_0 及像电荷 q' 在原球面上任一点B处产生的电位应为零，即：

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0}{|\mathbf{r} - d\hat{\mathbf{x}}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - x'\hat{\mathbf{x}}|} \right)$$

利用边界条件：

$$U|_{r=R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_0}{|\mathbf{R} - d\hat{\mathbf{x}}|} + \frac{q'}{|\mathbf{R} - x'\hat{\mathbf{x}}|} \right) = 0$$

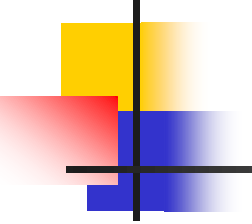
由上式导出：

$$\frac{q_0 / R}{\left| \hat{r} - \frac{d}{R} \hat{x} \right|} = - \frac{q' / x'}{\left| \frac{R}{x'} \hat{r} - \hat{x} \right|},$$

该式成立的充分必要条件是**分子、分母分别相等**，亦即：

$$\frac{q_0}{R} = -\frac{q'}{x'}, \quad \left| \hat{r} - \frac{d}{R} \hat{x} \right| = \left| \frac{R}{x'} \hat{r} - \hat{x} \right|$$

其中第二个等式化为：


$$1 - \frac{2d}{R}(\hat{r} \cdot \hat{x}) + \left(\frac{d}{R}\right)^2 = 1 - \frac{2R}{x'}(\hat{r} \cdot \hat{x}) + \left(\frac{R}{x'}\right)^2$$

从中解得 $d/R = R/x'$ ，将其代入第一个等式，求得像电荷的位置和电量，结果为：

$$x' = \frac{R^2}{d}, \quad q' = -\frac{R}{d} q_0$$

■ 于是，求得球壳外（ $r \geq R$ ）的**电势**和**电场**表达式如下：

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta)^{1/2}} - \frac{R}{(r^2 d^2 + R^4 - 2rdR^2 \cos \theta)^{1/2}} \right]$$
$$E_r = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r - d \cos \theta}{(r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta)^{3/2}} - \frac{Rd(rd - R^2 \cos \theta)}{(r^2 d^2 + R^4 - 2rdR^2 \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

$$E_{\theta} = \frac{q_0 d \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{(r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta)^{3/2}} - \frac{R^3}{(r^2 d^2 + R^4 - 2rdR^2 \cos \theta)^{3/2}} \right]$$

■ 不难验证 $E_{\theta}|_{r=R}=0$ ，即导体壳表面电场切向分量为零。导体表面的面电荷密度为：

$$\sigma_e(R, \theta) = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_r(R, \theta) = -\frac{q_0(d^2 - R^2)}{4\pi R(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{3/2}}.$$

■ 导体壳上的总电量为：

$$\begin{aligned} q_i &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma_e(R, \theta) \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= -\frac{q_0(d^2 - R^2)R}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)^{3/2}} = -\frac{R}{d} q_0, \end{aligned}$$

即 $q_i = q'$ ，导体壳上的总电量与像电荷的电量相等。

■ 作用到 q_0 上的力，也就是像电荷 q' 对它的库仑力，即：

$$F = \frac{q_0 q' \hat{x}}{4\pi \varepsilon_0 (d - x')^2} = -\frac{q_0^2 (R/d) \hat{x}}{4\pi \varepsilon_0 [d - (R^2/d)]^2} = -\frac{Rd q_0^2 \hat{x}}{4\pi \varepsilon_0 (d^2 - R^2)^2}$$

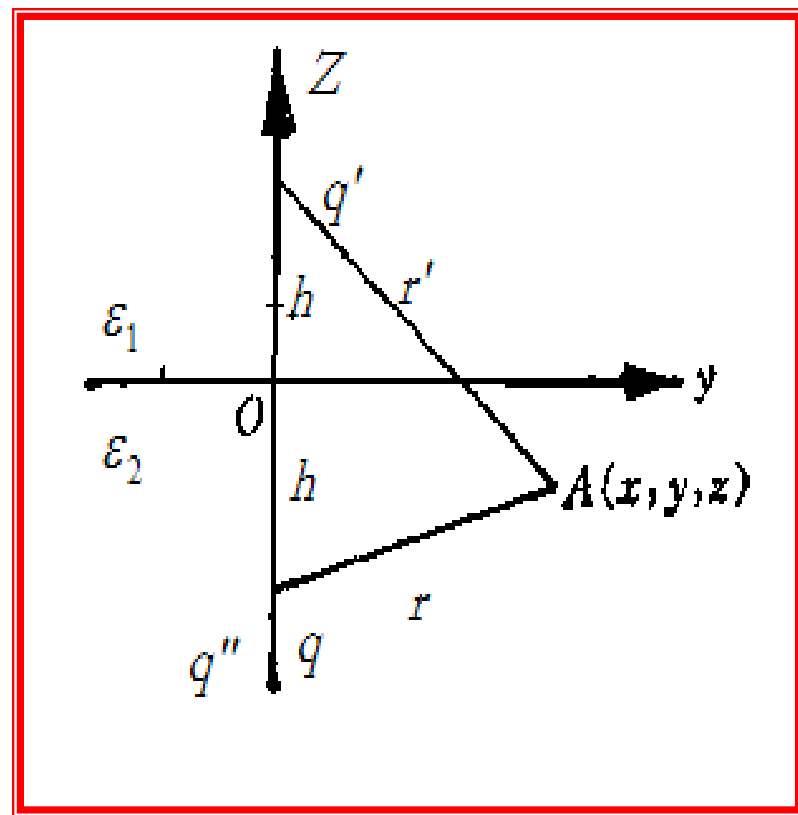
***[例2-8-3]**如右下图所示，介电常量分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 半无限介质的界面为一无限平面，在介质2中置入点电荷 q ，它与界面的垂直距离为 h ，求界面极化电荷的分布。

[解] 我们尝试用电像法来解，即用像电荷来代表界面上极化电荷对电场的贡献。

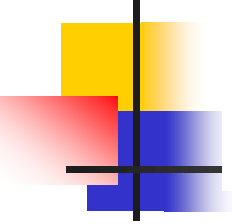
如右图所示：

■ 设对 ϵ_2 区 ($z < 0$)，这一贡献可用像电荷 q' 代表；

■ 而对 ϵ_1 区 ($z \geq 0$)，可用像电荷 q'' 代表。



求得两区域**电势**的表达式为：


$$U_1 = \frac{1}{4\pi r} \left(\frac{q}{\varepsilon_2} + \frac{q''}{\varepsilon_0} \right), \quad (z \geq 0),$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{q}{\varepsilon_2 r} + \frac{q'}{\varepsilon_0 r'} \right), \quad (z \leq 0)$$

注意上述表达式中，**源电荷的贡献**应被所在介质中的介电常量除，这相当于计入了源电荷周围的极化电荷的贡献；而**像电荷已代替了介质的贡献**，所以采用真空中的电势计算公式。

上述电场应满足如下边值关系：

D 的法向分量相等

$$U_1|_{z=0} = U_2|_{z=0}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \varepsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

将 U_1 和 U_2 的表达式代入上面两式分别求得：

$$q'' = q', \quad \varepsilon_1 \left(\frac{q}{\varepsilon_2} + \frac{q''}{\varepsilon_0} \right) = \varepsilon_2 \left(\frac{q}{\varepsilon_2} - \frac{q'}{\varepsilon_0} \right)$$

可解出：

$$q' = q'' = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} q$$

束缚面电荷密度：

$$\begin{aligned} \sigma'_e &= (P_{2z} - P_{1z})_{z=0} = [(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)E_{2z} - (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E_{1z}]_{z=0} \\ &= \varepsilon_0(E_{1z} - E_{2z})_{z=0} = \frac{q'h}{2\pi r^3} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)hq}{2\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3}. \end{aligned}$$

讨论：当取 $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ ， $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ 时，我们得到如下结果：

$$q' = q'' = -q, \quad U_1 = 0, \quad U_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$$

上述结果和 **例2-8-1** 的结果一致。因此，在静电学范围内，**导体可当作介电常量趋于无穷的电介质的极限。**

电像法小结

- 理论根据： 唯一性定理。
- 基本思想：
 - 在域外放置适当的像电荷，等效导体边界上未知的感应或束缚电荷对域内电场的影响。
- 适用的对象：
 - 边界简单(球、无穷长圆柱、无穷大面)域内电荷简单(线、点)。
- 原则： 满足给定的边界条件；
还要满足原边值关系。