第三章　控制系统的时域稳定性

（教材第6章）

3-1 稳定性的基本概念

3-2 Routh—Hurwitz稳定性判据

3-3 Routh—Hurwitz稳定性判据的应用

第六讲：控制系统时域稳定性

（3学时）

3-1 稳定性的基本概念

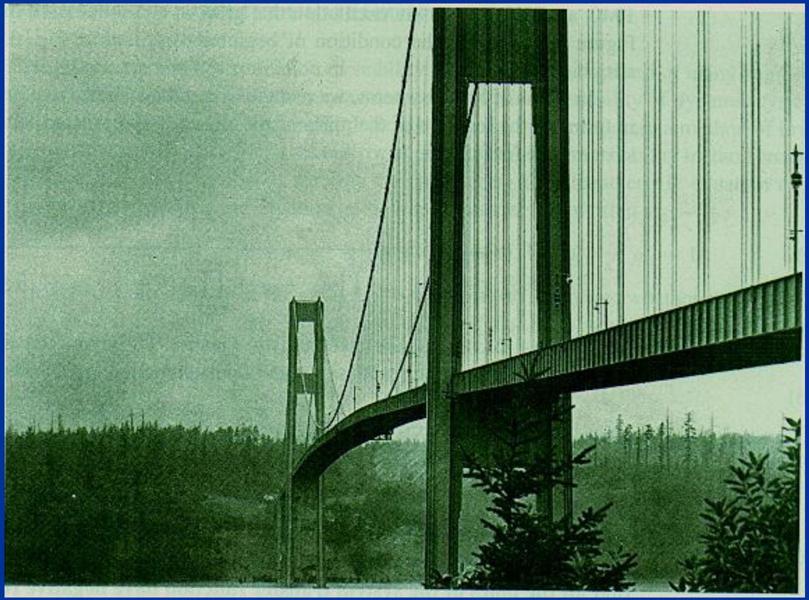
3-2 Routh—Hurwitz稳定性判据

3-3 Routh判据的应用

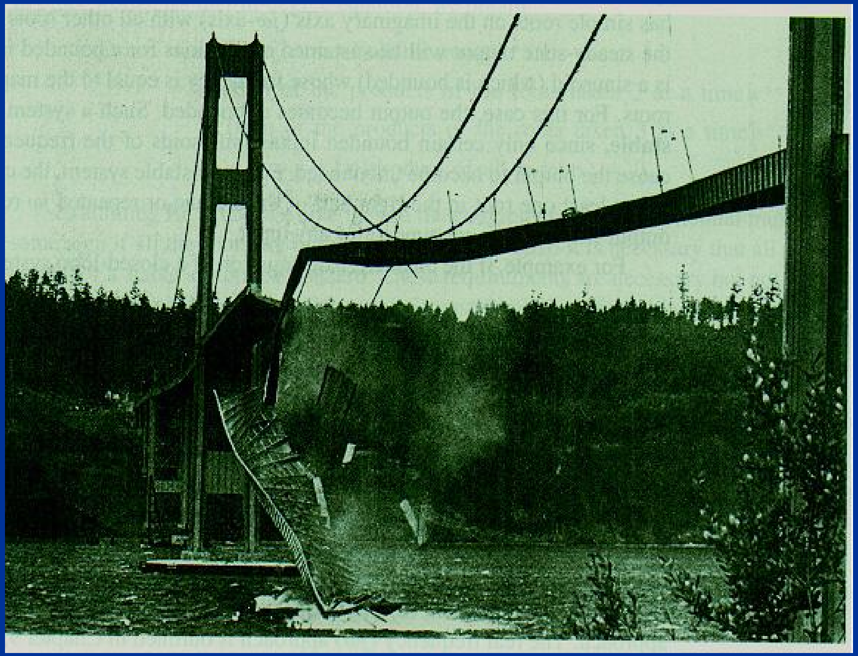
3-1 基本概念与结论

一、基本概念

右图是塔科马峡谷的首座大桥，开通于1940年7月1日。只要有风，这座大桥就会晃动。

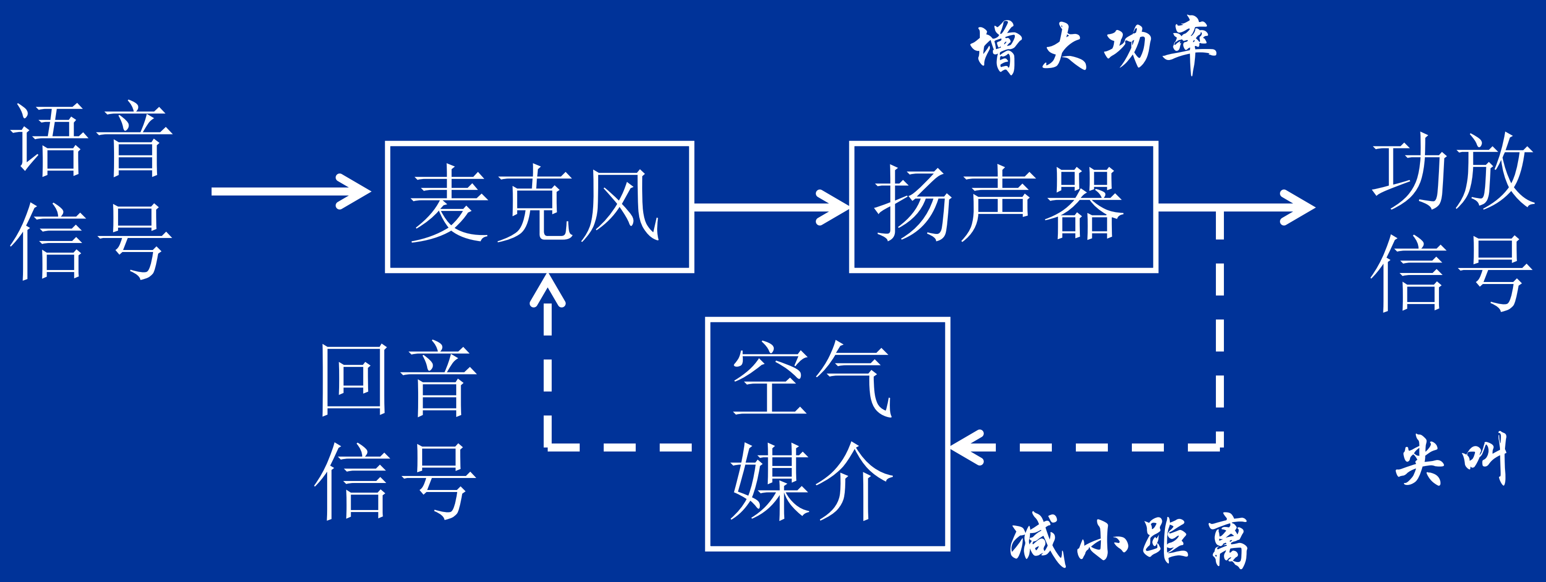


4 个月之后，一阵风吹过，引起桥的晃动，而且越来越大，直到……

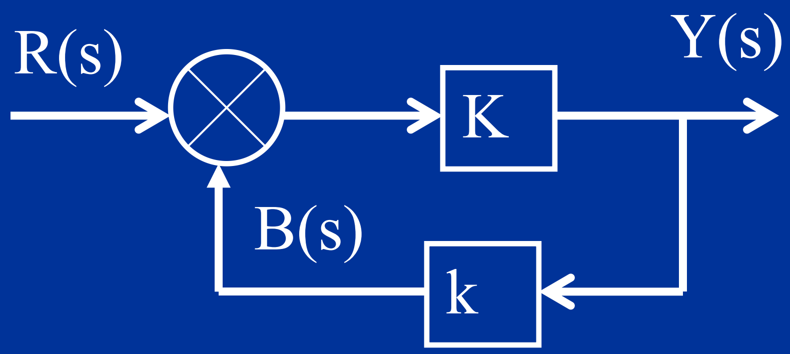


同理，不要在桥上齐步走！

例3.1 麦克风和扬声器



例3.1 麦克风和扬声器



G(s)=K/（1-K*k）

拾音器正反馈

(a) K=5， k=0.1

1→10　1.5 →15　2 →20…

(b) K=5,　k=0.2

1→∞

(c) K=10,　k=0.1

1→∞

系统稳定性 (输入输出稳定性):

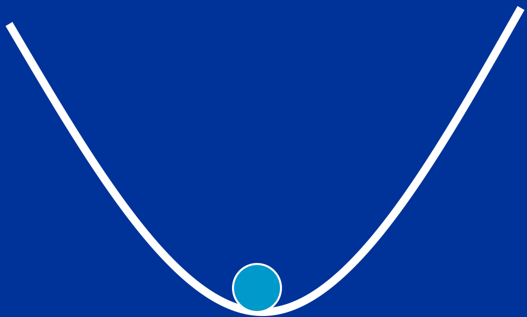
对任何有界输入产生有界输出的系统成为稳定系统。

这种性质保证了系统的绝对稳定性。

对稳定系统而言，在稳定的前提下，还可以讨论系统的相对稳定性。

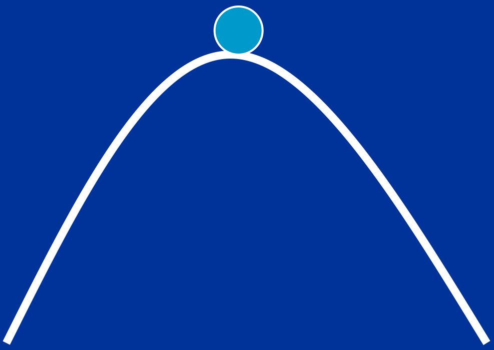
民航客机就比战斗机更加稳定。

[理解]



绝对稳定

临界稳定



不稳定

2. 系统稳定的充要条件

闭环传递函数的一般形式为：

$$G(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{l}(s-z_i)}{s^N\prod_{j=1}^{Q}(s+\sigma_j)\prod_{m=1}^{R}\left(s^2+2a_m s+(a_m^2+\omega_m^2)\right)}$$

其中，系统的非零极点为：$p_j=-\sigma_j$ 和

$p_m,\overline{p_m}=-a_m\pm j\omega_m$

当 N=0时，系统脉冲响应的一般表达式为：

$$y(t)=\sum_{j=1}^{Q}A_j e^{-\sigma_j t}+\sum_{m=1}^{R}B_m(\frac{1}{\omega_m})e^{-a_m t}\sin(\omega_m t+\theta_m)$$

其中，A_j B_m 是依赖于系统参数的常值系数。

当 σ_j和 a_m取正值时，对任何有界输入， y(t)都是有界的。此时，所有闭环极点都在s平面的左半平面。

如果系统在右半平面至少有一个极点，(某个 a_m 或 σ_j 取负值), 或在虚轴上有重根，系统对任何输入的响应都会是无界的。

例如，如果虚轴根 $\pm j\omega$ 是二重根，对应的部分分式分解应该为：

$$\frac{\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(s-j\omega\right)^2}+\frac{1}{\left(s+j\omega\right)^2}\right)+\frac{1}{2\left(s^2+\omega^2\right)}$$

而对应的系统脉冲响应为无界输出：

$$y_{part}\left(t\right)=-\frac{t}{4}\sin(\omega_m t)+\frac{1}{2\omega_m}\sin(\omega_m t)$$

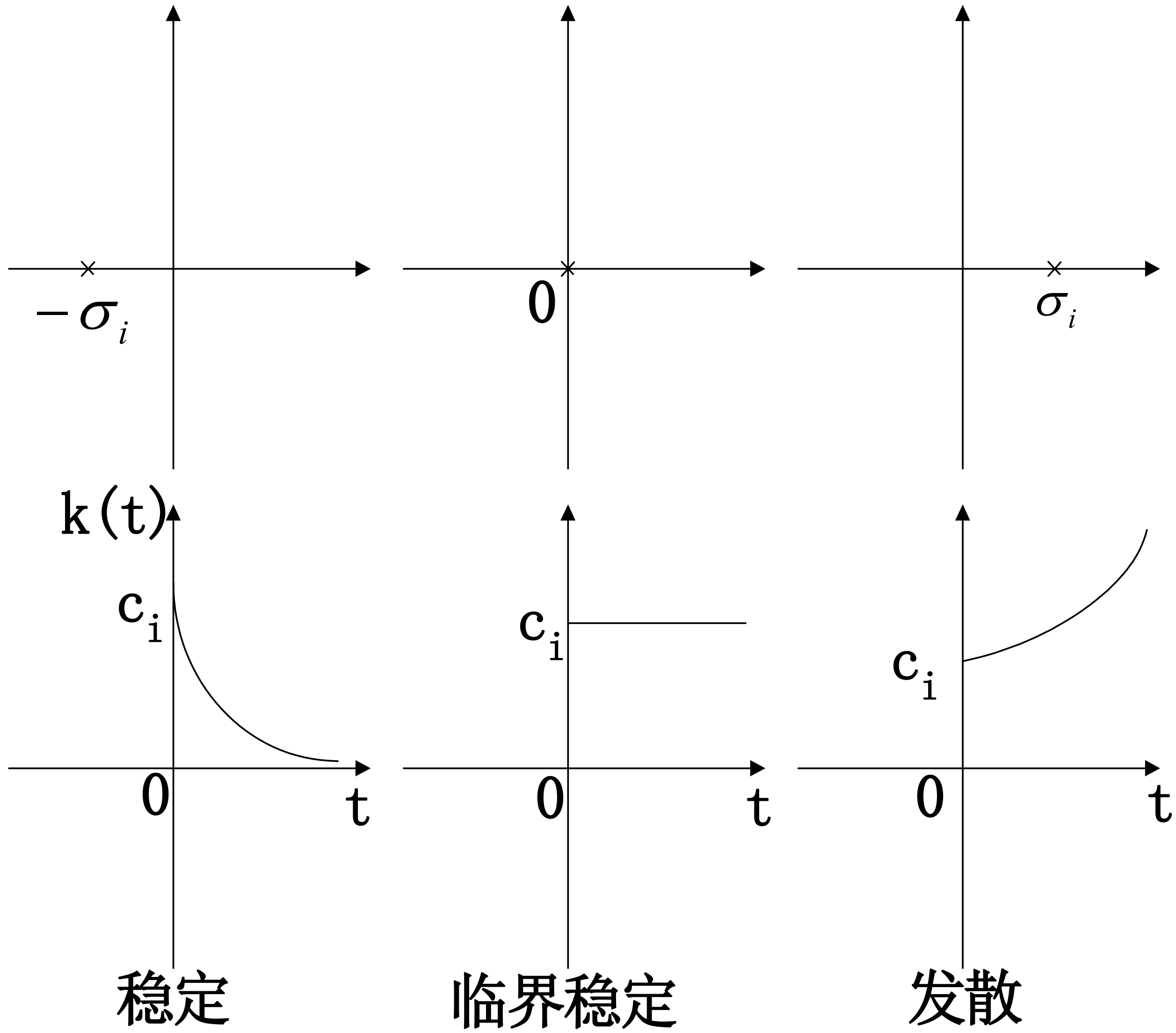
当系统在虚轴上只有简单极点（含N=1），而其他极点都在左半平面内时，系统将是临界稳定的。

此时，系统对特定的输入会出现无界输出，而对大部分有界输入产生的是有界响应。例如，存在简单虚轴极点时，系统对有界输入的响应是有界持续振荡，但当输入为有界正弦信号且频率正好为虚根幅值时，输出却是无界的。

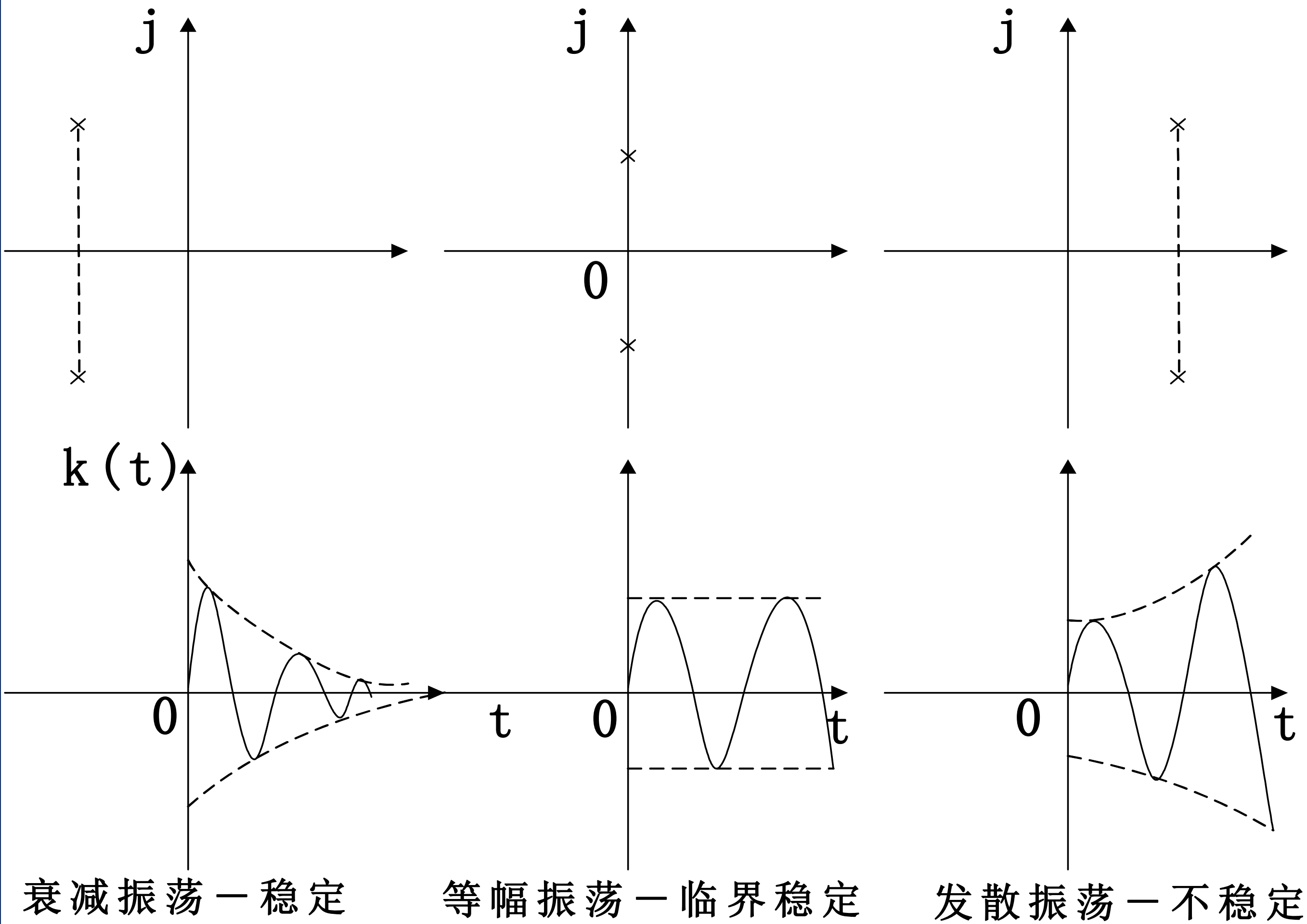
用公式解释，留做练习！

归纳而言， LTIC系统绝对稳定的充要条件是

闭环系统所有的极点为负值或有负的实部，或者说，闭环系统所有的极点都位于s平面的左半平面。



实根情况下系统的稳定性



共轭复根情况下系统的稳定性

注意： 由于模型的近似化，且系统的参数又处在不断的微小变化中，所以，临界稳定实际上也应视为不稳定。

3-2 劳思稳定性判据

[判据]

（1） 系统稳定的必要条件:特征方程中所有项的系数均大于 0 （同号）；只要有1项等于或小于 0 ，则为不稳定系统。

（2）系统稳定的充分条件：劳思表第一列元素均大于0（同号） 。

（3）系统不稳定的充分条件：劳思表第一列若出现小于0的元素，则系统不稳定。且第一列元素符号改变的次数等于系统正实部根的个数。

设特征方程为

$$a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

则Routh表为

$$
\begin{array}{llll}
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 \\
s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^3 & \dfrac{a_4 a_3 - a_5 a_2}{a_4} = b_1 & \dfrac{a_4 a_1 - a_5 a_0}{a_4} = b_2 & 0 \\
s^2 & \dfrac{b_1 a_2 - a_4 b_2}{b_1} = c_1 & a_0 & \\
s^1 & \dfrac{c_1 b_2 - b_1 a_0}{c_1} = d_1 & 0 & \\
s^0 & a_0 & &
\end{array}
$$

例3.2 $$s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$$

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 3 & 5 \\ s^3 & 2 & 4 & \\ s^2 & 1 & 5 & \\ s^1 & -6 & 0 & \\ s^0 & 5 & & \end{array}$$

则系统不稳定，且有两个正实部根。（即有2个根在S的右半平面。）

一次方程: $a_1 s + a_0 = 0$

a_1,a_0同号，则系统稳定。

二次方程: $a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

a_1,a_2,a_0同号，则系统稳定。

三次方程: $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

a_0,a_1,a_2,a_3均大于0，且$a_1 a_2 > a_3 a_0$，则系统稳定。

情况一、首列均不为0；

情况二、首列出现0，但该行不全为0；

情况三、首列出现0，且该行全为0；

情况四、虚轴上有重根。

其中，情况一是重点。

劳斯表情况一

例3.3、含参变量的例子：设系统特征方程为：

$s^3+s^2+s+K=0$；K不等于 1 或 0

劳斯表

s^3	1	1
s^2	1	K
s^1	1-K	0
s^0	K	

参数取值影响稳定性！

于是：

K 小于 0 ，系统不稳定；

K 大于 1 ，系统不稳定；

K 大于 0 且小于 1 时，系统稳定。

例3.4 设系统特征方程为：　劳斯表情况二

$$s^6+2s^5+3s^4+4s^3+5s^2+6s+7=0$$

劳斯表

s^6	1	3	5	7
s^5	2	4	6	
s^4	1	2	7	
s^3	ε	-8		
s^2	$2+8/\varepsilon$	7		
s^1	$-8-7\varepsilon/(2+8/\varepsilon)$			
s^0	7			

$(6-14)/1=-8$

劳斯表特点

右移一位降两阶

2 每两行个数相等，否则补0。

3 行列式第一列不动

4 次对角线减主对角线

5 分母总是上一行第一个元素

6 一行可同乘或同除某正数

7 第一列出现零元素时，用正无穷小量ε代替。

8 再令正无穷小量ε趋近于0，得到真正的劳斯表如下。

系统稳定的必要条件:
特征方程各项系数
均大于零！ 同号！
有正有负一定不稳定！

缺项一定不稳定！

$-s^2-5s-6=0$稳定吗？

s^6	1	3	5	7
s^5	2	4	6	
s^4	1	2	7	
s^3	0	-8		
s^2	$+\infty$	7		
s^1	-8			
s^0	7			

系统稳定的充分条件:

劳斯表第一列元素不变号！

若变号，则系统不稳定！ 本例的系统不稳定。

变号的次数为s右半平面上特征根的个数！

劳斯表情况二

例3.5 含参变量的例子：设系统特征方程为：

$$s^4+s^3+s^2+s+K=0$$

劳斯表

s^4	1	1	k
s^3	1	1	0
s^2	ε	k	0
s^1	$(\varepsilon-K)/\varepsilon$	0	
s^0	K		

令ε趋近于 0 ，劳斯表首列出现 K 与负无穷大之积。

K 非零时，系统总是不稳定的。

劳斯表情况三（不展开）

例3.6 设系统特征方程为：

$$s^4+5s^3+7s^2+5s+6=0$$

劳斯表

s^4	1	7	6
s^3	1	1	
s^2	1	1	
s^1	0		
s^0	1		

劳斯表出现零行，系统一定不是稳定的。

① 存在关于原点对称的特征根时，会出现零行

② 由零行的上一行构成辅助方程，辅助方程的根也是特征方程的根

$$s^2+1=0$$

③ 求解辅助方程得：

$$s_{1,2}=\pm j$$

由综合除法，可得另两个根为 $s_{3,4}=-2,-3$

劳斯表情况四（不展开）

例3.7、设系统特征方程为：

$s^5+s^4+2s^3+2s^2+s+1=0$， 即：

$(S+1)(S+j)(S-j)(S+j)(S-j)=0$

劳斯表

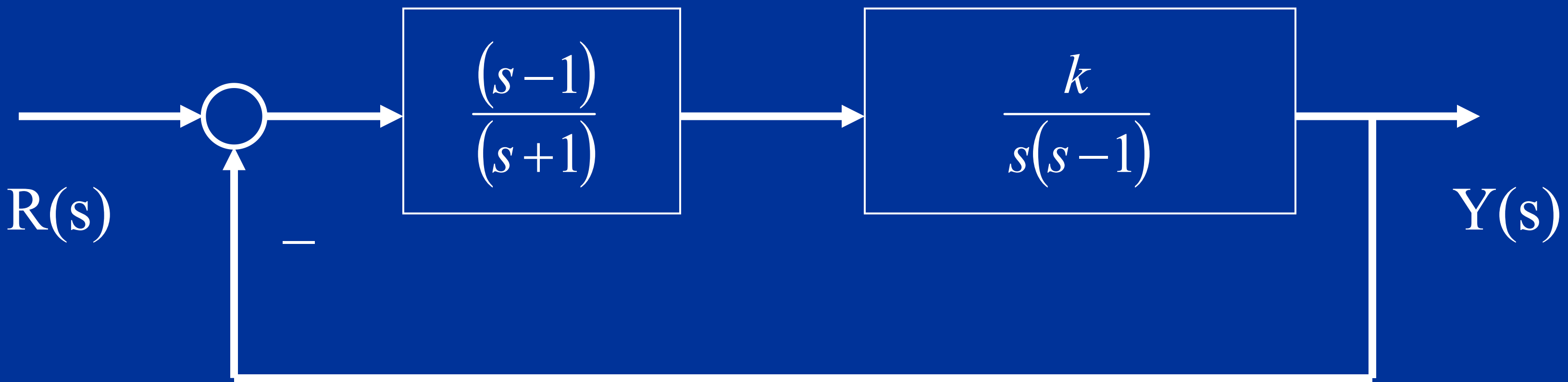
s^5	1	2	1
s^4	1	2	1
s^3	ε	ε	0
s^2	1	1	
s^1	ε	0	
s^0	1		

令ε趋近于0，劳斯表首列仍没有变号，但继续出现0，此时，劳斯判据失效。

系统在虚轴上有重根，响应中含有$t\sin(t)$成分，是发散的。

3-3 劳思判据的应用举例

例3.8 试分析如下系统的稳定性，其中K>0

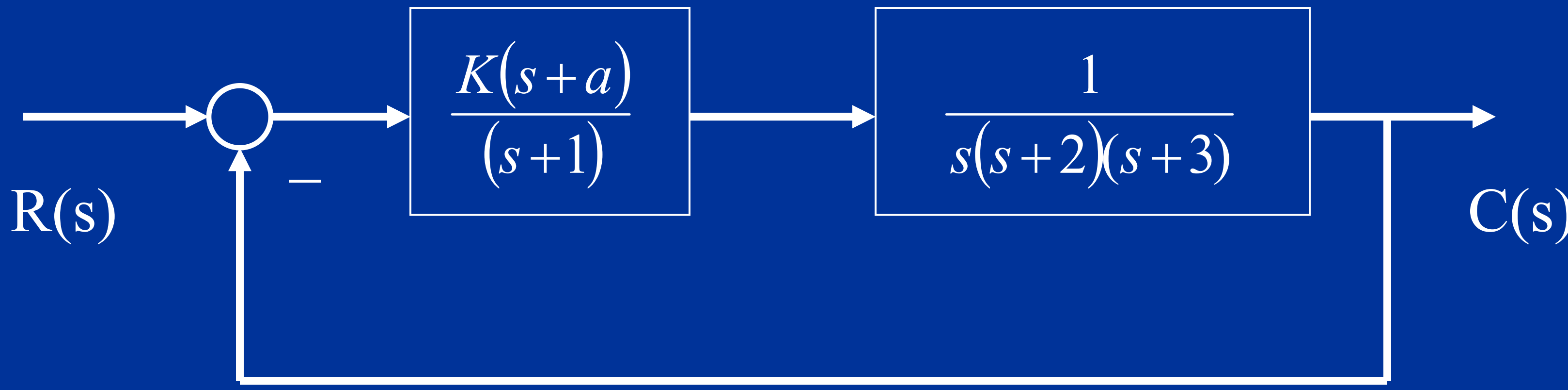


系统的特征方程为：

$$1+G(s)=1+\frac{K(s-1)}{s(s+1)(s-1)}=0$$

系统稳定否？ **不稳定！**

例3.9 焊接控制（p256例6.5)



系统的特征方程为：

$$1+G(s)=1+\frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}=0$$

要求确定参数K和a的范围，以保证系统稳定。

列劳思表：

$$s^4+6s^3+11s^2+(k+6)s+ka=0$$

s^4	1	11	ka
s^3	6	$k+6$	
s^2	$(60-k)/6$	ka	
s^1	$k+6-(36ka/(60-k))$	0	
s^0	ka		

$$k<60;$$

$$a<\frac{(k+6)(60-k)}{30k}$$

若取k=40，则要求a<0.639

例3.10 已知系统的特征方程为:

$$0.025s^3 + 0.325s^2 + s + k = 0$$

试判断使系统稳定的k值范围,如果要求特征值均位于s=-1垂线之左。问k值应如何调整?

将特征方程化为:

$$s^3 + 13s^2 + 40s + 40k = 0$$

列劳思表，可解得:

使系统稳定的k值范围是 **0<k<13**。

若要求全部特征根在 s=-1 之左，则虚轴向左平移一个单位，令 **$s=s_1-1$** 代入特征方程，得:

$$(s_1-1)^3+13(s_1-1)^2+40(s_1-1)+40k=0$$

$$\Downarrow$$

$$s_1^3+10s_1^2+17s_1+(40k-28)=0$$

列劳思表:

s_1^3	1	17
s_1^2	10	$40k-28$
s_1^1	$\dfrac{170-(40k-28)}{10}$	
s_1^0	$40k-28$	

第一列元素均大于0，则得:

$$0.7 < k < 4.95$$

例3.11 已知系统的特征方程为：

$$1+\frac{k(s+1)}{s^{3}+as^{2}+2s+1}=0$$

若系统以 $\omega_n = 2rad/s$ 的频率作等幅振荡，试确定参数K和a之值。

列劳思表:

$$\begin{array}{lll}
s_1^3 & 1 & 2+k \\
s_1^2 & a & k+1 \\
s_1^1 & (2+k)-\dfrac{1+k}{a} & \\
s_1^0 & k+1 &
\end{array}$$

由于系统处于等幅振荡状态，因此闭环系统必具有共轭纯虚根： j2和-j2。

$$\frac{(2+k)a-(k+1)}{a}=0 \Rightarrow a=\frac{k+1}{k+2}$$

$$\begin{aligned} &as^2+k+1=0 \\ &s_{1,2}=\pm j\sqrt{\frac{1+k}{a}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+k}{a}}=2 \\ a=\dfrac{k+1}{k+2} \end{cases}$$

可得： $\begin{cases} k=2 \\ a=0.75 \end{cases}$

习题

(时域稳定性的习题一并布置）

E6.1, E6.2, E6.4, E6.9, E6.14, E6.16, E6.17, E6.19, P6.1, P6.11, P6.16, P6.18, DP6.2, MP6.2, MP6.4