

节次	节 名	小节标题
1. 1	场论和张量分析	线性正交坐标变换，张量的定义，由矢量和张量构成的不变量（标量），三维张量的乘法运算，三维张量微分，正交曲线坐标系，高斯定理、斯托克斯公式和格林公式， δ -函数
1. 2	电磁场的数学描述	麦克斯韦方程组，关于场源，电磁性能方程，导体中的自由电荷和传导电流
1. 3	边值关系	麦克斯韦方程的积分形式，边值关系，边值关系和边界条件
1. 4	电磁场的能量、动量和角动量	电磁场对带电体的力和功率，电磁场的能量及能量守恒，电磁场的动量及动量守恒，电磁场的角动量及角动量守恒，电磁场—介质系统的能量、动量和角动量分析，线性各向同性介质界面上的能量动量守恒关系，电磁场热力学方程
1. 5	麦克斯韦方程的完备性	完备性的含义，电磁场解的唯一性定理，几点说明

- 加入场论和张量分析一节，为本书做好基本数学准备
- 回顾和综述电磁现象的基本规律
- 边值关系及其与边界条件的区别和联系
- 论述麦克斯韦方程的守恒性和完备性

1. 问题的由来

- 为描述时空中的物质运动，必须

- a) 引入参考系(4维)和坐标系(3维) — 实现时空的定量描述
- b) 引入物理量 — 实现对物质运动的定量描述
- c) 建立相关物理量的联系 — 基本物理规律

- 物理要求

- a) 限于三维位置空间 — 物理量和物理规律与位置空间坐标系选择无关
- b) 进入四维时空 — 物理量和物理规律与参考系选择无关(相对性原理)

- 实现途径

- a) 物理量必须是在参考系或坐标系变换下的不变量 — 张量
- b) 物理规律可以写成张量形式(不变形式)
- c) 需要用到场论和张量分析的基本概念和数学工具

- 两种学习方式：

- a) “渐进式”：系统、严谨学习一门知识，如所有课程学习
- b) “查阅式”：默认和跳过大部分内容，查到并学懂相关部分，满足特定需要
- c) 场论和张量分析作为一个训练“查阅式”学习能力的平台

2. 笛卡儿坐标正交线性变换下的张量概念

- 一般张量及其运算的定义：在任意坐标变换下不变
- 本教材为何限于笛卡儿坐标的正交线性变换？
 - a) 简单：基矢为常单位矢量，彼此正交；变换矩阵为常数矩阵
 - b) 不妨：张量概念与坐标变换具体形式无关（限于欧几里得空间）
 - c) 实用：狭义相对论的洛伦兹变换属于正交线性变换
- 三维位置空间中曲线坐标系下的张量微分运算
 - a) 在直角坐标系下成立的张量微分恒等式，在所有曲线坐标系下成立（“下标法”）
 - b) 如果要写出张量微分的具体表达式，必须采用直角坐标与曲线坐标之间的变换关系（既非线性又非正交）

张量分析参考读物：

- [1] 黄克智等，张量分析，2009，北京：清华大学出版社
- [2] 余天庆，毛为民，张量分析及应用，2006，北京：清华大学出版社
- [3] 吕盘明，张量算法，2008，合肥：中国科学技术大学出版社
- [4] 胡友秋，曲线坐标系，2010，内部材料（qxzbx.pdf）

【备注】本课程勿需实施曲线坐标系下的张量微分运算，可暂时跳过

3. 本节目的：

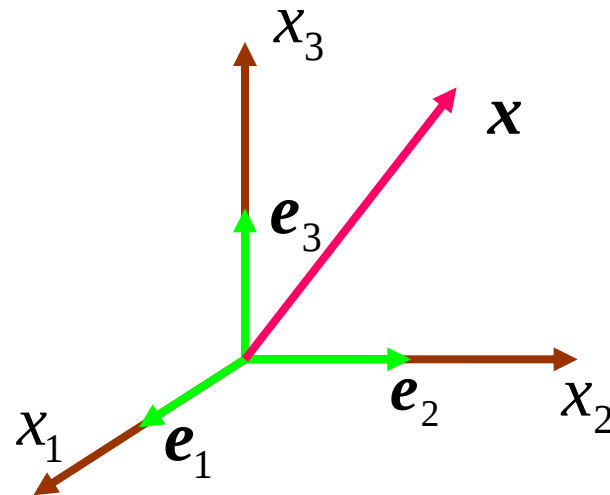
- 在直角坐标的正交线性变换下简介张量及其运算
- 回顾和介绍场论相关知识：
 - 正交曲线坐标系（给出结果，不予证明）
 - 高斯公式、斯托克斯公式和格林公式（推广）
 - δ 函数（基本性质及其应用）
- 张量分析运算技巧
 - 在直角坐标下推导和证明张量微分恒等式：“下标法”和“符号法”
 - 推导矢量和二阶张量的不变量
 - 为狭义相对论铺垫：构建张量和张量微分方程（参见第8章）

一 线性正交坐标变换

1. N 维空间的坐标、基矢和位置矢量

$N = 3$: 三维位置空间（物理学中的绝大部分场论和张量分析限于该空间）

$N = 4$: 四维时空（狭义相对论）



提示：按对通常三维空间去理解 N 维空间

坐标： $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 基矢： $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, \dots, N)$

正交归一关系：

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j; \end{cases} \quad (1.1.1)$$

位置矢量： $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ （同指标求和） (1.1.2)

坐标和基矢具有相对性，但要求位置矢量是绝对量

2. 线性正交坐标变换

在 N 维空间引入线性齐次变换

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad (1.1.3)$$

- 要求实现位置矢量不变

- 长度不变(空间间隔不变)

$$\sum_{i=1}^N x_i'^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (1.1.4)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i'^2 = a_{ij} x_j a_{il} x_l = a_{ij} a_{il} x_j x_l = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

$$a_{ij} a_{il} = \delta_{jl}, \quad \text{或} \quad A^T \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad A^T = A^{-1} \quad (1.1.5)$$

$$A^T = \{a_{ji}\} \quad A = \{a_{ij}\}, \quad A \text{ 为正交矩阵, 对应线性正交变换}$$

逆变换公式：将 a_{il} 乘上 (1.1.3) 对下标求和，得逆变换公式；
采用矩阵乘法的方式推导更为简洁：

$$\mathbf{x}' = A \cdot \mathbf{x} \Rightarrow A^T \cdot \mathbf{x}' = A^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \Rightarrow x_i = a_{ji} x'_j \quad (1.1.6)$$

对上式再用一次条件 (1.1.4)： $a_{ji} a_{li} = \delta_{jl}$ ，或 $A \cdot A^T = I$

➤ 方向也不变（整个矢量不变）
 $\mathbf{x}' = x'_i \mathbf{e}'_i = x_j \mathbf{e}_j = \mathbf{x}$

将逆变换式 $x_j = a_{ij} x'_i$ 代入上式得 $x_j \mathbf{e}_j = a_{ij} x'_i \mathbf{e}_j = x'_i \mathbf{e}'_i$

由 x'_i 的任意性，必有 $\mathbf{e}'_i = a_{ij} \mathbf{e}_j$ ($x'_i = a_{ij} x_j$) (1.1.8)

求得基矢的变换公式，与坐标变换式相同。新基矢也满足正交归一关系：

$$\mathbf{e}'_i = a_{il} \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{e}'_j = a_{jk} \mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = a_{il} \mathbf{e}_l \cdot a_{jk} \mathbf{e}_k = a_{il} a_{jk} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_k = a_{il} a_{jl} = \delta_{ij}$$

由基矢等于坐标梯度也可导出基矢变换关系： $\mathbf{e}'_i = \nabla x'_i = a_{ij} \nabla x_j = a_{ij} \mathbf{e}_j$

● 位移分量变换和位移矢量的不变性（由变换的线性性质）

1. 定义： $dx_i = x_i^{(2)} - x_i^{(1)},$

2. 变换： $x'_i = a_{ij} x_j \quad \Rightarrow \quad dx'_i = a_{ij} dx_j \quad (1.1.9)$

3. 位移矢量模不变即空间间隔不变： $(1.1.10)$

$$\sum_{i=1}^N x_i'^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N dx_i'^2 = \sum_{i=1}^N dx_i^2$$

4. 位移矢量的整体不变性：

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x} = dx_i \mathbf{e}_i \quad (1.1.11)$$

证明：

$$d\mathbf{x}' = dx'_i \mathbf{e}'_i = a_{ij} dx_j a_{il} \mathbf{e}_l = a_{ij} a_{il} dx_j \mathbf{e}_l = \delta_{jl} dx_j \mathbf{e}_l = dx_l \mathbf{e}_l = d\mathbf{x}$$

- **位移分量变换矩阵和基矢变换矩阵转置互逆**——张量概念的基础
- 设位移分量变换矩阵为 P ，基矢变换矩阵为 Q ，则在矩阵表示下有：

$$\begin{pmatrix} dx'^1 \\ dx'^2 \\ \vdots \\ dx'^N \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ \vdots \\ dx^N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_N \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad dx'^i \mathbf{e}'_i = dx^i \mathbf{e}_i$$

$$dx'^i \mathbf{e}'_i = (dx'^1, dx'^2, \dots, dx'^N) \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_N \end{pmatrix} = (dx^1, dx^2, \dots, dx^N) P^T Q \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N \end{pmatrix} = dx^i \mathbf{e}_i$$

充分必要条件： P 和 Q 转置互逆

$$P^T Q = P Q^T = I$$

对正交线性变换， $P=Q=A$ 为正交矩阵，满足转置互逆条件： $A^T A = A A^T = I$

● 变换矩阵的行列式及其推论

➤ 行列式的绝对值等于1

$$\det(A^T \cdot A) = \det A^T \cdot \det A = (\det A)^2 = 1$$

两种可能：

$\det A = -1$ ：奇数个坐标轴反演：时间坐标反转或空间坐标反射

$\det A = 1$ ：坐标轴的刚性旋转(本书限于这种情况) (1.1.12)

➤ 推论：体积元不变：

$$dV' \equiv \prod_{i=1}^N dx'_i = \prod_{i=1}^N dx_i \equiv dV \quad (1.1.13)$$

证明：

$$dV' = \left| \frac{\partial(x'_1, x'_2, \dots, x'_N)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)} \right| dV = |\det A| dV = dV$$

二 张量的定义

- 零阶张量(标量)：含一个分量，在线性正交坐标变换下维持不变
例如前面已经提到的空间间隔、空间体积元

- 一阶张量(矢量)：含 N 个分量，它们按与坐标变换一样变换

$$f'_i = a_{ij} f_j \quad (1.1.15)$$

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}_i \quad (1.1.16)$$

例如前面已经提到的位置矢量和位移矢量；作为一个整体不变

- 二阶张量：含 N^2 个分量，按如下方式变换(按系数第2下标求和)

$$T'_{ij} = a_{im} a_{jn} T_{mn} \quad (1.1.17)$$

$$\vec{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.1.18)$$

$$a_{im} a_{il} = \delta_{ml}$$

$$a_{jn} a_{jk} = \delta_{nk}$$

利用变换矩阵的性质，可证明二阶张量整体不变：

$$\vec{T}' = T'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = a_{im} a_{jn} T_{mn} a_{il} \mathbf{e}_l a_{jk} \mathbf{e}_k \stackrel{\text{按系数第2下标求和}}{=} \delta_{ml} \delta_{nk} T_{mn} \mathbf{e}_l \mathbf{e}_k = T_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n = \vec{T}$$

● 再论变换矩阵转置互逆作为张量概念的基础

$$T'_{ij} = a_{im} a_{jn} T_{mn} = a_{im} T_{mn} a_{jn} \quad (1.1.17)$$

换成矩阵表示： $T' = PTP^T$

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_N) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N) Q^T$$

$$\vec{T}' = T'_{ij} \mathbf{e}'_i \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}'_i T'_{ij} \mathbf{e}'_j$$

$$= (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_N) T' \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_N \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N) Q^T PTP^T Q \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N) T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{e}_i T_{ij} \mathbf{e}_j = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \vec{T}$$

充分必要条件： P 和 Q 转置互逆

$$Q^T P = P^T Q = I$$

- 三阶张量：含 N^3 个分量，它们按如下方式变换

$$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn} \quad (1.1.20)$$

注意右边的求和下标为变换系数的第二下标；
其不变性同样来自变换矩阵的转置互逆条件

- 几种常见的特殊二阶张量(以下简称二阶张量为张量)

$$1 + 2 + \cdots + N = N(N+1)/2$$

1. 对称张量： $T_{ij} = T_{ji}$ ， 共有 $N(N+1)/2$ 个独立分量

2. 反对称张量： $T_{ij} = -T_{ji}$ ， 共有 $N(N-1)/2$ 个独立分量

任何张量都可以按如下方式分解为一个对称张量和反对称张量的叠加：

$$T_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})}_{\text{对称部分}} + \underbrace{\frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})}_{\text{反对称部分}}$$

$$N(N+1)/2 + N(N-1)/2 = N^2$$

● 几种常见的特殊二阶张量(续)

3. 单位张量： $T_{ij} = \delta_{ji}$ ， 对角分量为1，非对角分量为零

4. 并矢： $T_{ij} = f_i g_j$ 或 $\vec{T} = fg$ (1.1.19)

➤ 一般不具备互易性，即一般 $fg \neq gf$ ，除非 f 与 g 成比例

➤ 二阶张量可分解为并矢的叠加，但一般不能化成单个并矢

【提示】利用二阶张量可以分解为并矢这一性质，可将涉及张量的运算公式的证明转化为并矢运算公式的证明，后者一般较为简单（技巧）

【注意】特殊张量的特性在坐标变换下维持不变；对单位张量而言，其所有分量在坐标变换下均维持不变！

三 由矢量和张量构成的不变量（标量）

- 寻找不变量（标量）——科学的永恒目标
- 由矢量构成的不变量——矢量的模

$$\sum_{i=1}^N f_i'^2 = f_i' f_i' = a_{ij} f_j a_{il} f_l = \delta_{jl} f_j f_l = f_j f_j = \sum_{i=1}^N f_i^2$$

- 由张量构成的不变量——对应矩阵的本征值

$$T' = A \cdot T \cdot A^T = A \cdot T \cdot A^{-1} \quad (1.1.21)$$

相似矩阵： $T \sim T'$ ，具有相同的本征值，满足如下代数方程

$$\det(T - \lambda I) = 0$$

上述方程共有 N 个本征值

- 【问题】
1. 独立不变量的个数为多少？
 2. 如何以一种便捷方式找到所有独立不变量？

解决途径：将本征值方程写为 $\eta = -\lambda$ 的 N 次代数方程

$$\eta^N + C_{N-1}\eta^{N-1} + C_{N-2}\eta^{N-2} + \dots + C_1\eta + C_0 = 0 \quad (1.1.22)$$

$C_{N-1} = \text{Tr}(T)$, 迹;

$C_0 = \det(T)$, 行列式;

C_i : 去掉 i 个对角元素的所有余子式之和

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + \eta & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} + \eta & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} + \eta \end{pmatrix} = 0$$

上述系数可取代 N 个本征值，直接构成不变量，但

1. 等于零的系数不涉及任何张量元素，不构成不变量
2. 相同、反号的系数只算一个不变量

结论：独立不变量的个数至多为 N

例1.1 求并矢的独立不变量, 说明4维反对称张量独立不变量的个数至多为2个.

解 (1) 考察并矢 fg :

$$f_i g_j = \begin{pmatrix} f_1 g_1 & f_1 g_2 & \cdots & f_1 g_N \\ f_2 g_1 & f_2 g_2 & \cdots & f_2 g_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_N g_1 & f_N g_2 & \cdots & f_N g_N \end{pmatrix}$$

所有子行列式为零, 唯一不为零的系数为 $C_{N-1} = f_i g_i = f \cdot g$

(2) 4维反对称张量对应如下矩阵

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

对角元素之和为零: $C_3 = \text{Tr}(T) = 0$;

去掉一个对角元素, 得到的余子式为零, 故有: $C_1 = 0$.

因此, 至多只有两个独立不变量: C_2 和 C_4 , 证毕

四 三维张量的乘法运算

- 说明：1. 定义张量运算的前提：运算结果仍为张量
同维张量的和与差仍为同维张量，但乘法可导致变维
2. 为何限于三维（位置空间）张量及其运算？

- 三维张量的乘法运算（省略证明过程）

➤ 点乘（标积）

1. 矢量与矢量点乘：
$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = f_i g_i,$$
 结果为标量

可互易性：
$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{f},$$

2. 矢量与张量点乘： $(\mathbf{f} \cdot \vec{T})_j = f_i T_{ij}, \quad (\vec{T} \cdot \mathbf{f})_j = T_{ji} f_i;$ 结果为矢量

一般不互易： $\mathbf{f} \cdot \vec{T} \neq \vec{T} \cdot \mathbf{f},$ $\vec{T}$ 为对称张量时互易： $\mathbf{f} \cdot \vec{T} = \vec{T} \cdot \mathbf{f}$

3. 矢量与并矢点乘： $\mathbf{f} \cdot (\mathbf{g} \mathbf{h}) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{h}, \quad (\mathbf{g} \mathbf{h}) \cdot \mathbf{f} = \mathbf{g} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{f}),$
结果为矢量

【注意】掌握就近点乘规则，一般不互易

➤ 点乘（续）

4. 张量（并矢）之间点乘：

$$(\vec{S} \cdot \vec{T})_{ij} = S_{ik} T_{kj}, \quad (\vec{T} \cdot \vec{S})_{ij} = T_{ik} S_{kj}$$

$$(fg) \cdot (pq) = (g \cdot p) fq, \quad (pq) \cdot (fg) = (q \cdot f) pg$$

结果为张量，一般不可互易

5. 张量与张量双点乘（张量标积）：

$$\vec{S} : \vec{T} = S_{ij} T_{ji} = T_{ji} S_{ij} = \vec{T} : \vec{S}$$

结果为标量，具备可互易性

$$\text{与单位张量标积：} \vec{T} : \vec{I} = \vec{I} : \vec{T} = \text{Tr}(\vec{T}), \quad \vec{I} : \vec{I} = \text{Tr}(\vec{I}) = 3.$$

$$\text{并矢之间的标积：} (fg) : (pq) = (g \cdot p)(f \cdot q) \quad (\text{就近点乘规则})$$

➤ 叉乘（矢积）

1. 交错符号（又称“置换符号”，见(1.1.23)式）

$$\varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{下标偶排列} \\ -1, & \text{下标奇排列} \\ 0, & \text{下标出现重复} \end{cases}$$

排列123及其偶置换，例如

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = 1$$

排列123的奇置换，例如

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1$$

下标出现重复，例如

$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{223} = \varepsilon_{333} = 0$$

【备注】交错符号 ε_{ijk} 与克罗内克符号存在如下有用关系：

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

当使用下标法处理含两次叉乘运算的张量表达式时特别有用。

2. 矢量与矢量叉乘：

$$\mathbf{h} = \mathbf{f} \times \mathbf{g}, \quad h_i = \varepsilon_{ijk} f_j g_k, \quad \text{结果为矢量}$$

$$\mathbf{f} \times \mathbf{g} = -\mathbf{g} \times \mathbf{f}, \quad \text{互易反号}$$

3. 矢量与张量叉乘：

$$\vec{\mathbf{S}} = \mathbf{f} \times \vec{\mathbf{T}}, \quad S_{ij} = \varepsilon_{imn} f_m T_{nj}; \quad \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{T}} \times \mathbf{f}, \quad R_{ij} = \varepsilon_{jmn} T_{im} f_n, \quad \text{结果为张量}$$

一般不互易： $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{\mathbf{S}}$ ，除非 $\vec{\mathbf{T}}$ 为单位张量，此时成立

$$\mathbf{f} \times \vec{\mathbf{I}} = \vec{\mathbf{I}} \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & -f_3 & f_2 \\ f_3 & 0 & -f_1 \\ -f_2 & f_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{三维二阶反对称张量} \\ \text{与三维(赝)矢量对应} \end{array}$$

矢量与并矢叉乘，掌握就近叉乘规则：

$$\mathbf{f} \times (\mathbf{g} \mathbf{h}) = (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) \mathbf{h}, \quad (\mathbf{g} \mathbf{h}) \times \mathbf{f} = \mathbf{g} (\mathbf{h} \times \mathbf{f})$$

五 三维张量微分

- 三维矢量微分算符

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.1.24)$$

- 梯度、散度和旋度

矢量梯度

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i, \quad \nabla f = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad \nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad (1.1.25)$$

$$\nabla \cdot \vec{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \mathbf{e}_j, \quad \nabla \times \mathbf{f} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i.$$

张量散度

条件：直角坐标

- 与位置矢量有关的矢量微分公式

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r, \quad \nabla f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{df}{dr} \mathbf{e}_r, \quad \nabla \mathbf{r} = \vec{I}, \quad (1.1.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3, \quad \nabla \times [f(r)\mathbf{r}] = 0.$$

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r, \nabla f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{df}{dr} \mathbf{e}_r, \nabla \mathbf{r} = \vec{\mathbf{I}}, \nabla \cdot \mathbf{r} = 3, \nabla \times [f(r)\mathbf{r}] = 0. \quad (1.1.26)$$

【说明】 利用

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

容易证明(1.1.26)中各等式成立，例如：

$$\begin{aligned} \nabla r &= (\mathbf{e}_x \partial / \partial x + \mathbf{e}_y \partial / \partial y + \mathbf{e}_z \partial / \partial z)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} (2x\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y + 2z\mathbf{e}_z) = \frac{\mathbf{r}}{r}, \\ \nabla \mathbf{r} &= (\mathbf{e}_x \partial / \partial x + \mathbf{e}_y \partial / \partial y + \mathbf{e}_z \partial / \partial z)(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) \\ &= \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z = \vec{\mathbf{I}}. \end{aligned}$$

为何在直角坐标下做出证明？为何可以这样证明？

● 推导和证明张量微分恒等式（数据组的集体运算）

1. 下标法：从张量和矢量微分算符的定义式（带下标）出发

- 将矢量微分算符和被作用张量展开为下标形式
- 分别对各张量分量实施偏微分运算
- 对下标进行适当的置换运算
- 将下标表达式还原为作为整体的矢量微分算符和张量

说明：直角坐标下的偏微分运算；最终结果与坐标系无关

2. 符号法：利用矢量微分算符的双重性

- 作为矢量，满足通常矢量点乘和叉乘运算法则
- 作为算符，需作用于张量表达式中的所有对象

说明：与下标法的等效性；操作便捷，适合于复杂张量微分运算

例1.2 用下标法证明 $\nabla \cdot (f \times g) = g \cdot (\nabla \times f) - f \cdot (\nabla \times g)$

证

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f \times g) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathbf{e}_m \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot (\varepsilon_{ijk} f_j g_k \mathbf{e}_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_{ijk} f_j g_k) \stackrel{\textcircled{2}}{=} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} g_k + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} f_j \\ &\stackrel{\textcircled{3}}{=} g_k \varepsilon_{kij} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - f_j \varepsilon_{jik} \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \stackrel{\textcircled{4}}{=} g \cdot (\nabla \times f) - f \cdot (\nabla \times g). \quad \text{证毕} \end{aligned}$$

① 按矢量微分算符和张量的定义将原微分表达式展开为下标形式

② 对被作用和式中的每一个对象求偏导数

③ 对交替单位张量分量的下标进行偶置换(不变)和奇置换(反号)

④ 按矢量微分算符和张量的定义将下标表达式还原

归纳：共分展开、微分、置换(对交替单位张量下标)和还原四步，第三、四步为难点，需熟背矢量微分算符、张量及其代数运算的定义式

补例：用下标法证明 $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) + \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{f} - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g}$
证

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{f} \times \mathbf{g})_k = \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{kmn} f_m g_n) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial}{\partial x_j} (f_m g_n) \\ &= \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_j} g_n + \frac{\partial g_n}{\partial x_j} f_m \right) \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_j} g_n + \frac{\partial g_n}{\partial x_j} f_m \right) \mathbf{e}_i \\ &= (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_j} g_n + \frac{\partial g_n}{\partial x_j} f_m \right) \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} g_j + \frac{\partial g_j}{\partial x_i} f_j \right) \mathbf{e}_i \\ &\quad - \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} g_i + \frac{\partial g_i}{\partial x_j} f_i \right) \mathbf{e}_i \stackrel{\textcircled{4}}{=} \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{f} + \mathbf{f} \nabla \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g} - \mathbf{g} \nabla \cdot \mathbf{f} \end{aligned}$$

证毕

归纳：也分展开、微分、置换(对交错符号下标)和还原四步，其间用到交错符号与克罗内克符号的关系式，以及克罗内克符号的性质

补例：用符号法证明 $\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) + \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{f} - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g}$

证 (1) 视 ∇ 为“算符”，分别作用 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ （加上下标以示区别），得两项：

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \nabla_f \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) + \nabla_g \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g})$$

(2) 视 ∇_f 矢和 ∇_g 为“矢量”，遵循矢量运算规则，将其置于作用对象前方：

$$\nabla_f \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla_f \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla_f \cdot \mathbf{f}) = \mathbf{g} \cdot \nabla_f \mathbf{f} - \mathbf{g} \nabla_f \cdot \mathbf{f},$$

$$\nabla_g \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla_g \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla_g \cdot \mathbf{f}) = \mathbf{f} \nabla_g \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot \nabla_g \mathbf{g}.$$

(3) 代回原式并舍去矢量算符的下标得

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{f} + \mathbf{f} \nabla \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{g} - \mathbf{g} \nabla \cdot \mathbf{f}$$

证毕

与下标法等效，但推导过程简洁

例1.3 用符号法证明 $\nabla \cdot (fgh) = (\nabla \cdot f)gh + (f \cdot \nabla g)h + g(f \cdot \nabla h)$

证 将矢量微分算符分别作用于各对象 f, g 和 h :

$$\nabla \cdot (fgh) = \nabla_f \cdot (fgh) + \nabla_g \cdot (fgh) + \nabla_h \cdot (fgh)$$

利用矢量代数运算将算符 ∇ 移至被作用对象前方，去掉 ∇ 的下标：

$$\nabla_f \cdot (fgh) = (\nabla_f \cdot f)gh = (\nabla \cdot f)gh,$$

$$\nabla_g \cdot (fgh) = (\nabla_g \cdot f)gh = (f \cdot \nabla_g)gh = (f \cdot \nabla g)h,$$

$$\nabla_h \cdot (fgh) = (\nabla_h \cdot f)gh = g(f \cdot \nabla_h)h = g(f \cdot \nabla h).$$

代回原式，证毕

熟练符号法之后，可默记 ∇ 的作用对象，略去加下标的手续

例1.4 用符号法证明 $\nabla \cdot (fg \times r) = [\nabla \cdot (fg)] \times r + g \times f$ ，
式中 r 为位置矢量。

证

$$\nabla \cdot (fg \times r) = [\nabla \cdot (fg)] \times r + g \times (f \cdot \nabla r)$$

默记右边第一项中的 ∇ 作用于 fg ，第二项中的 ∇ 作用于 r ；此外，按就近运算的规则， ∇ 应与 f 的点乘，而 g 则应与 r 叉乘。

由

$$g \times (f \cdot \nabla r) = g \times (f \cdot \vec{I}) = g \times f, \quad \text{代回原式，证毕}$$

- 【提示】
1. 对于存在非并矢形式的张量的情况，不便实施“就近运算规则”移动算符位置，可换用下标法
 2. 也可用并矢“取代”张量，使用符号法证明

例1.5 用下标法证明 $\nabla(\vec{T} : \nabla E) = \vec{T} : \nabla \nabla E$ ，式中 $\vec{T}$ 为常张量， E 满足 $\nabla \times E = 0$ 。

证

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{T} : \nabla E) &= \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(T_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right) = T_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_k \\ &= T_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_k = T_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_k = \vec{T} : \nabla \nabla E, \end{aligned}$$

归纳： 也分为展开、微分、置换(偏微分顺序)和还原四步，其中用到 $\nabla \times E = 0$ 的条件： $\partial E_i / \partial x_k = \partial E_k / \partial x_i$ 。

例1.5 用并矢法证明 $\nabla(\vec{T}:\nabla E) = \vec{T}:\nabla\nabla E$ ，式中 $\vec{T}$ 为常张量， E 满足 $\nabla\times E=0$ 。

证 如果坚持用符号法，可形式地将张量换为并矢： $\vec{T} = fg$ ，得

$$\nabla(\vec{T}:\nabla E) = \nabla(fg:\nabla E) = \nabla(g\cdot\nabla E)\cdot f = (g\cdot\nabla)(\nabla E)\cdot f,$$

$$(\nabla E)\cdot f = f\cdot\nabla E - (\nabla\times E)\times f = f\cdot\nabla E, \quad \text{(此处用到}\nabla\times E=0\text{)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= (g\cdot\nabla)(\nabla E)\cdot f = (g\cdot\nabla)(f\cdot\nabla E) \\ &= fg:\nabla\nabla E = \vec{T}:\nabla\nabla E, \end{aligned}$$

【说明】

1. 上述证明的有效性在于：任何张量可分解为若干并矢之和
2. 最终要将中间并矢 fg 还原成原状；若出现形如 gf 的项，则须将它代之以相应张量的转置。
3. 在证明过程中用到红框中的恒等式，可用符号法证明。

$$(\nabla\times E)\times f = (f\cdot\nabla)E - (\nabla E)\cdot f$$

● 关于符号法的要点小结

- 使用范围：含矢量、并矢的表达式的矢量微分运算（如表达式中出现张量，则代之以与之等效的并矢组合）
- 矢量微分算符必须一一作用于表达式中的所有对象（常量除外）
- 明确参与点乘或叉乘运算的双方（矢量或矢量微分算符），并在推导中维持该运算关系不变

1. 标量乘法：互易

2. 矢量点乘：互易 $\nabla \cdot (fgh) = (\nabla \cdot f)gh + (f \cdot \nabla g)h + g(f \cdot \nabla h)$

3. 矢量叉乘：互易反号 $\nabla \cdot (f \times g) = g \cdot (\nabla \times f) - f \cdot (\nabla \times g)$

4. 矢量并合：不互易

5. 并矢（张量）双点乘：互易

6. 明确点乘或叉乘双方：就近点乘和就近叉乘原则

$$\nabla \cdot (fg \times r) = [\nabla \cdot (fg)] \times r + g \times (f \cdot \nabla r)$$

- 最终使得矢量算符领先并紧靠被作用对象

六 正交曲线坐标系（三维位置空间）

- 引入曲线坐标系的目的：处理弯曲界面和弯曲边界
- 正交曲线坐标系(u_1, u_2, u_3)：相应基矢($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$)彼此正交

1. 拉梅系数：
$$h_i = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

2. 弧元：
$$ds_1 = h_1 du_1, \quad ds_2 = h_2 du_2, \quad ds_3 = h_3 du_3 \quad (1.1.33)$$

3. 面元：
$$d\sigma_1 = h_2 h_3 du_2 du_3, \quad d\sigma_2 = h_1 h_3 du_1 du_3, \quad d\sigma_3 = h_1 h_2 du_1 du_2 \quad (1.1.34)$$

4. 体元：
$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1.1.35)$$

5. 矢量微分算符和基矢：
$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}, \quad \mathbf{e}_i = h_i \nabla u_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

- 柱坐标和球坐标系下的拉梅系数、基矢、梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符表达式(见教材和附录)； **重点：基矢表达式**

● 正交曲线坐标系的基矢与直角坐标基矢之间的关系

1. 必要性：直角坐标下基矢为常矢量，便于运算（积分、微分、泰勒展开）；将运算结果与曲线坐标基矢点乘或叉乘时，需将直角坐标基矢转换为曲线坐标基矢。
2. 转换公式参见式(1.1.27)~(1.1.30)
3. 即席推导基矢关系，以球坐标基矢为例：

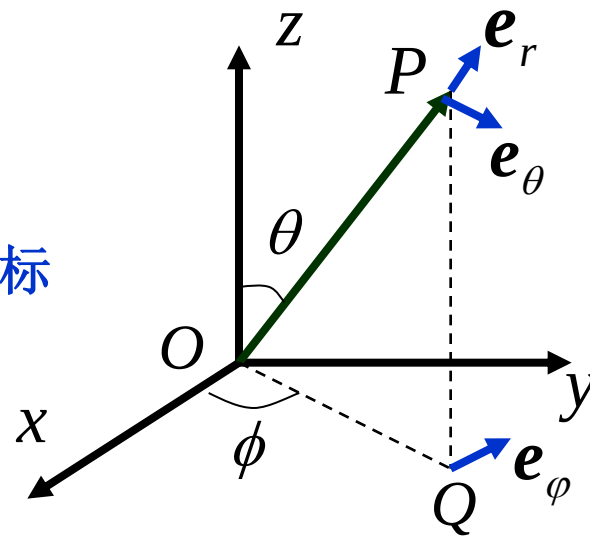
- 过考察点绘出球坐标基矢
- 将各基矢向各直角坐标轴投影，求得按直角坐标的展开式，即式(1.1.29)：

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y$$

- 将变换系数矩阵转置求得反变换关系 [参见式(1.1.30)]



● 正交曲线坐标系对张量定义及其运算的影响

- 对张量的定义及代数运算没有影响
- 对涉及矢量微分运算的全部恒等式没有影响
- 对微分运算结果（梯度、散度、旋度、拉普拉斯算符等）的具体形式及其分量形式有影响（原因：基矢是空间坐标的函数，受矢量微分算符作用）

说明：非正交坐标系出现两套基矢，相应张量出现协变分量和逆变分量

【建议】关于正交曲线坐标系和一般非正交曲线坐标系的微分运算知识和技巧，对从事物理学理论研究人员来说不可或缺；大学本科数学课程对曲线坐标系的介绍过于简单，建议有兴趣的同学今后适当扩充这方面的知识。

参考读物：胡友秋,曲线坐标系,2010(内部材料,曲线坐标系.pdf)

七 高斯公式、斯托克斯公式和格林公式

- 高斯公式和斯托克斯公式的推广

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \Rightarrow \oiint_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{A}} = \iiint_V dV \nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} \quad (1.1.40)$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_\Sigma (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \oint_C d\mathbf{l} \cdot \underline{\mathbf{A}} = \iint_\Sigma (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \cdot \underline{\mathbf{A}} \quad (1.1.41)$$

删去等式两边出现的 $\underline{\mathbf{A}}$ ，得如下算符公式

$$\oiint_S d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V dV \nabla \quad (1.1.42)$$

$$\oint_C d\mathbf{l} = \iint_\Sigma d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla \quad (1.1.43)$$

从上述算符公式出发，可以形式上获得一系列积分恒等式

算符恒等式：

$$\oint_S d\sigma = \iiint_V dV \nabla, \quad \oint_C dl = \iint_\Sigma d\sigma \times \nabla.$$

将上述算符公式以各种方式(并列、点乘、叉乘)作用于各阶张量，可获得一系列积分恒等式，例如

$$\oint_S \varphi d\sigma = \iiint_V \nabla \varphi dV, \quad \oint_C \varphi dl = - \iint_\Sigma \nabla \varphi \times d\sigma \quad (1.1.44)$$

$$\oint_S d\sigma \times A = \iiint_V \nabla \times A dV, \quad \oint_C dl \times A = \iint_\Sigma (d\sigma \times \nabla) \times A \quad (1.1.45)$$

$$\oint_S d\sigma \cdot \vec{T} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{T} dV, \quad \oint_C dl \cdot \vec{T} = \iint_\Sigma d\sigma \cdot (\nabla \times \vec{T}) \quad (1.1.46)$$

问题：这种推广方法合法吗？—— 事后可用常矢量点乘法证明

例1.6 用常矢量点乘法证明

$$\oiint_S \varphi d\sigma = \iiint_V \nabla \varphi dV, \quad \oint_C \varphi dl = -\iint_\Sigma \nabla \varphi \times d\sigma$$

证 用任意常矢量 c 点乘等式左右两边，分别求得

$$c \cdot \oiint_S \varphi d\sigma = \oiint_S \varphi c \cdot d\sigma = \iiint_V \nabla \cdot (\varphi c) dV = c \cdot \iiint_V \nabla \varphi dV$$

$$c \cdot \oint_C \varphi dl = \oint_C \varphi c \cdot dl = \iint_\Sigma [\nabla \times (\varphi c)] \cdot d\sigma = -c \cdot \iint_\Sigma \nabla \varphi \times d\sigma$$

由 c 的任意性，可将它从等式两边消去，证毕

● 格林公式（由高斯公式推得）

➤ 第一格林公式：
$$\oiint_S \psi \nabla \varphi \cdot d\sigma = \iiint_V (\psi \nabla^2 \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) dV \quad (1.1.47)$$

➤ 第二格林公式：

$$\oiint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot d\sigma = \iiint_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV \quad (1.1.48)$$

➤ 第三格林公式：
$$\oiint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\sigma = \iiint_V [\varphi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)^2] dV \quad (1.1.49)$$

证明：给定某(单连通)解域 V 内矢量场 A 的散度和旋度，以及边界 S 上的法向分量，该矢量场被唯一确定

证 用反证法。设有两个解， A_1 和 A_2 ；令 $a = A_1 - A_2$ ，则成立

$$\nabla \cdot a = 0, \quad \nabla \times a = 0, \quad a_n|_S = 0, \quad \text{令 } a = \nabla \varphi \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\iiint_V (\nabla \varphi)^2 dV = \oiint_S \varphi \nabla \varphi \cdot d\sigma \quad \text{或} \quad \iiint_V a^2 dV = \oiint_S \varphi a_n d\sigma = 0 \quad \text{证毕}$$

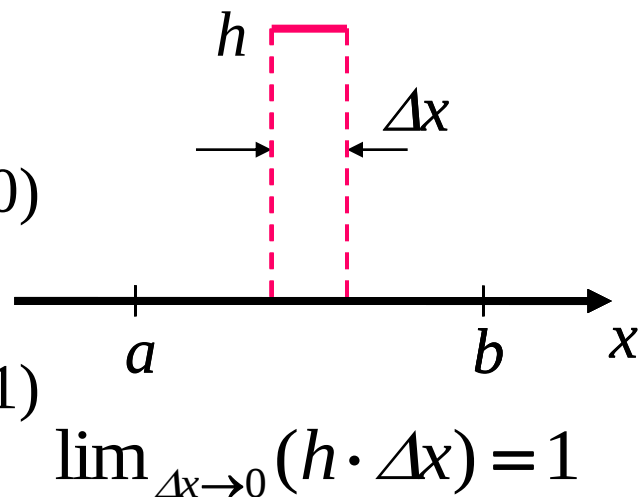
为何必须限于单连通域？确保 $\oint a \cdot dl = 0$ ，从而可引入 φ （见第3章）

八 δ 函数和阶跃函数

● 一维 δ 函数

$$1. \text{ 定义 } \delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0; \\ 0, & x \neq x_0; \end{cases} \quad (1.1.50)$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1, & x_0 \in (a, b); \\ 0, & x_0 \notin (a, b) \end{cases} \quad (1.1.51)$$



2. 其他性质（从 δ 函数的定义出发证明）

$$\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x), \quad \delta[\alpha(x - x_0)] = |\alpha|^{-1} \delta(x - x_0) \quad (1.1.52)$$

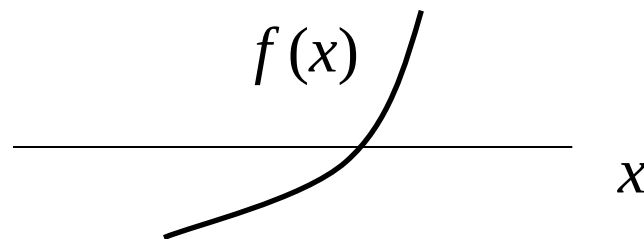
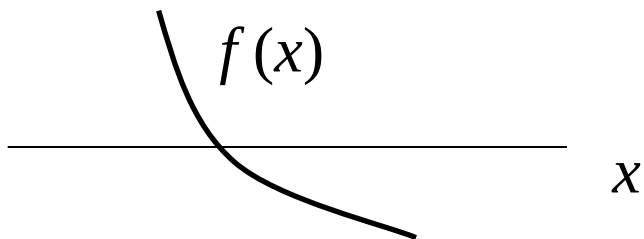
$$\delta(f(x)) = \sum_i \left| (df/dx)_{x=x_i} \right|^{-1} \delta(x - x_i) \quad (1.1.53)$$

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad x_0 \in (a, b) \quad (1.1.54)$$

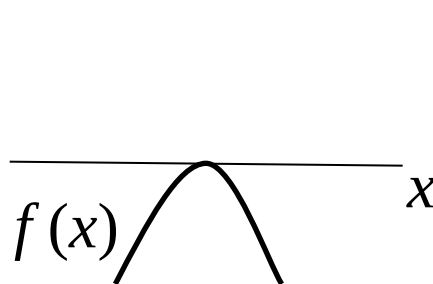
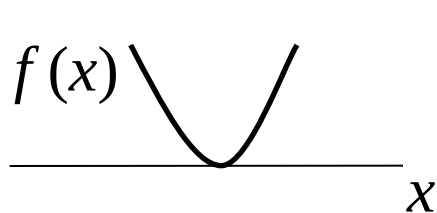
(1.1.53)中的 x_i 为 $f(x)$ 的“简单零点”， $(df/dx)_{x=x_i} \neq 0$

成立

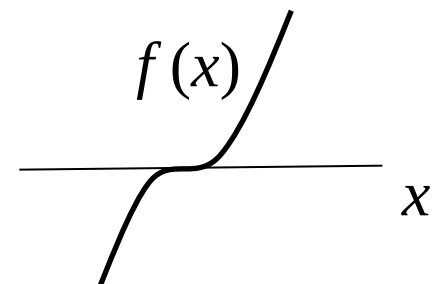
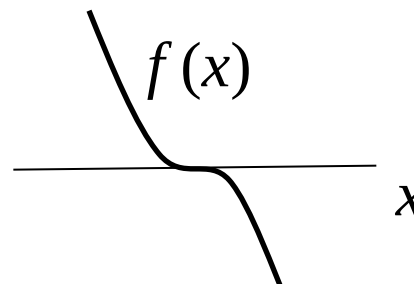
➤ 简单零点，成立 $(df / dx)_{x=x_i} \neq 0$



➤ 非简单零点，成立 $(df / dx)_{x=x_i} = 0$



极点



拐点

➤ $\delta(f(x))$ 在非简单零点处失去意义，不能定义

2. 其他性质（从 δ 函数的定义出发证明）（续）

补例：证明 $\delta[\alpha(x-x_0)] = |\alpha|^{-1} \delta(x-x_0)$, 即 (1.1.52) 式.

证

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta[\alpha(x-x_0)] dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^{-1} \delta(u) du = |\alpha|^{-1} & (\alpha > 0) \\ \int_{\infty}^{-\infty} \alpha^{-1} \delta(u) du = (-\alpha)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) du = |\alpha|^{-1} & (\alpha < 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha|^{-1} \delta(x-x_0) dx = |\alpha|^{-1}, \quad \text{证毕}$$

当 $\alpha = -1$ 时有 $\delta[-(x-x_0)] = \delta(x_0-x) = \delta(x-x_0)$

说明 δ 函数为偶函数

2. 其他性质（从 δ 函数的定义出发证明）（续）

补例：证明 $\delta(f(x)) = \sum_i \left| (df/dx)_{x=x_i} \right|^{-1} \delta(x-x_i)$ ，即(1.1.53)式。

证 取简单零点 x_i 的邻域 $(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)$ ，仅含该零点，有

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta(f(x)) dx = \begin{cases} \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} (df/dx)^{-1} \delta(f) df = \left| (df/dx)_{x=x_i} \right|^{-1} & (df/dx)_{x=x_i} > 0 \\ \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} (-df/dx)^{-1} \delta(f) df = \left| (df/dx)_{x=x_i} \right|^{-1} & (df/dx)_{x=x_i} < 0 \end{cases}$$

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \sum_i \left| (df/dx)_{x=x_i} \right|^{-1} \delta(x-x_i) dx = \left| (df/dx)_{x=x_i} \right|^{-1}$$

对全部简单零点的贡献求和得(1.1.53)式，证毕

重要结论：全部关于 δ 函数的等式，均是在积分意义上成立

2. 其他性质（从 δ 函数的定义出发证明）（续）

补例：证明 $\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0), \quad x_0 \in (a,b),$ 即 (1.1.54) 式.

证 由积分中值定理得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(f(\bar{x})_{\bar{x} \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x-x_0)dx \right) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

证毕

补例：计算积分 $\int_{-2}^2 \delta(x^2 - 1) dx$

解 由
$$\delta(f(x)) = \sum_i \left| (df/dx)_{x=x_i} \right|^{-1} \delta(x - x_i)$$

得
$$\delta(x^2 - 1) = \left| [d(x^2 - 1)/dx]_{x=-1} \right|^{-1} \delta(x + 1)$$

$$+ \left| [d(x^2 - 1)/dx]_{x=1} \right|^{-1} \delta(x - 1) = \frac{1}{2} [\delta(x + 1) + \delta(x - 1)]$$

将上式右边积分得 1。有人按如下方式求得

$$\int \delta(x^2 - 1) dx = \int \frac{1}{2x} \delta(x^2 - 1) d(x^2 - 1) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} \delta(u) du = \frac{1}{2}$$

试问错在何处？

回答：积分元变换函数 $x = f(u)$ 必须是积分区间内的单值函数！

此地 $x = \pm(1+u)^{1/2}$ 为积分区间 $(-2, 2)$ 内的多值函数

3. 一维 δ 函数作为普通函数的极限

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin Nx}{\pi x}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Nx}{x} dx = 1 \quad (N > 0),$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + x^2} dx = 1 \quad (a > 0).$$

$$\delta(\omega - \omega_0) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[\frac{2\omega_0}{\pi} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \right]$$

[参见第7章式(7.3.19)及其证明]

以上公式均可根据 δ 函数的定义作出证明

● 三维 δ 函数

1. 定义

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0; \\ 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0; \end{cases} \quad (1.1.55)$$

$$\iiint \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = 1 \quad (1.1.56)$$

2. 性质

$$\iiint f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0) \quad (1.1.57)$$

3. 点电荷的体电荷密度

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.1.58)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (1.1.59)$$

均匀分布无限平面 ($x=x_0$) 和无限长直线 ($x=x_0, y=y_0$) 电荷的体电荷密度

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma \delta(x - x_0), \quad \rho(\mathbf{r}) = \lambda \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

σ : 面电荷密度; λ : 线电荷密度

提示: 对给定电量、几何形状特殊的面电荷和线电荷分布, 可采取待定系数法: 在相应 δ 函数前面加上一个待定乘子(允许与空间坐标有关; 参见1.10题: 在球坐标下写出圆盘面电荷的体电荷密度)

4. 三维 δ 函数一个常用表达式

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (1.1.60)$$

证明

$$\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0: \quad \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) = \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} - \frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = 0$$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$: 在积分意义上理解(1.1.60), 即过以 $\mathbf{r}_0$ 为球心、半径为 a 的球的积分相等:

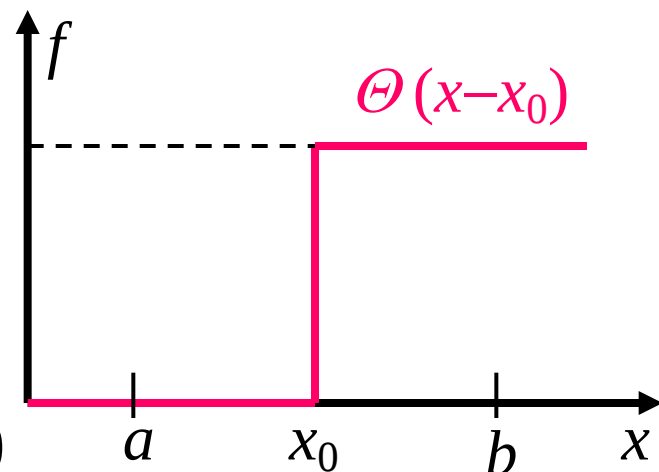
$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \iiint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq a} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq a} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \oiint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=a} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{1}{4\pi} \oiint d\Omega = 1, \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

证明过程中用到高斯公式和立体角的概念

● 阶跃函数（Heaviside函数）

1. 定义

$$\Theta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x \geq x_0; \\ 0, & x < x_0. \end{cases}$$



2. 与 δ 函数的关系

$$\delta(x - x_0) = \frac{d\Theta(x - x_0)}{dx}$$

证 a. 当 $x \neq x_0$ ，阶跃函数的导数为零；在 $x = x_0$ 处导数无意义
b. 在含 x_0 的区间 (a, b) ($a < x_0, b > x_0$) 积分，左边等于1，右边结果为

$$\int_a^b \frac{d\Theta(x - x_0)}{dx} dx = \int_a^b d\Theta(x - x_0) = [\Theta(x - x_0)]_a^b = 1 - 0 = 1$$

证毕

小 结

- 熟悉张量的定义和代数运算法则以及张量微分的定义
- 熟练使用下标法和符号法推演张量微分公式
- 从对应于高斯公式和斯托克斯公式的算符等式出发，写出它们各种推广形式
- 从 δ 函数的定义和性质出发，推导与之有关的恒等式
- 途径：重复教材中有关推导，独立完成习题