《信 号 与 系 统》

清华大学电子工程系
—专业技术基础课

主讲：任 勇 教 授

助教：许全盛 博士生

前 言

一、系统类课程的四个层次

- 信号与系统，郑君里
  - 信号的表示
  - 信号通过系统的输出/响应（系统分析）
  - 系统综合/设计（输入、输出 → 系统）
- 线性系统理论（与设计），郑大钟
  - 状态空间描述与运动分析
  - 可控性、可观性、稳定性、鲁棒性、反馈系统时域设计
- 高等系统分析，无代表作，系统分析的一般问题及提法
  - 不确定性原理：时宽、带宽，动量、位置，距离、速度，时、频
  - 反问题（反演方法）
- 复杂系统分析，未成熟，复杂性理论——21世纪的科学
  - 现代系统论、非线性理论、人工生命方法

二、本课的主要内容与地位

- 信号的表示：连续与离散时间信号在时域和变换域的表示
- 系统的响应：求线性时不变系统的输出
- 电子信息与电气类学科必备的基础知识和基本工具

三、与其它课程的关联关系

- 四个系统分析层次的最底层
- 支持两类课程：信号处理、系统分析
  - 数字信号处理（**DSP**）
  - 现代信号处理
  - 时间序列分析

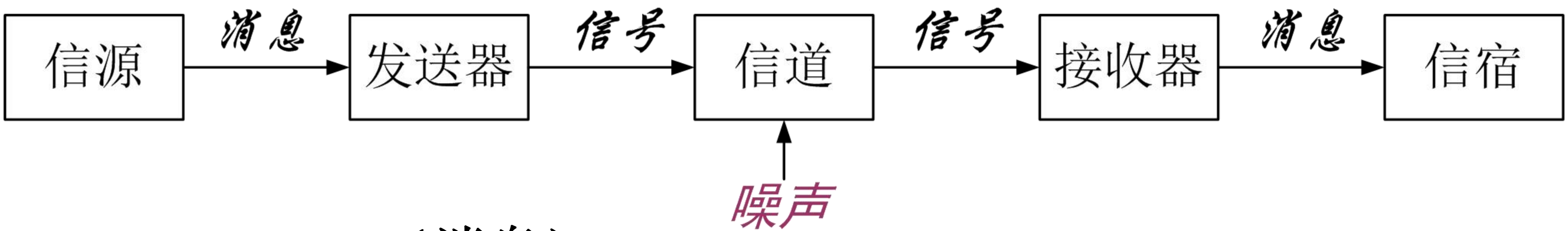
四、学习本课程的特点

- 概念第一、方法第二、技巧第三
  - 重视基本概念的思考
  - 重视基于概念的演绎
  - 不强调解析技巧
  - 不强调复杂计算
- 根据个人定位按广度、深度分层次学习
  - 理论性强、偏深（比照教材）
  - 内容有增减
  - 顺序有调整

Chapter 1 绪论

- §1.1 信号与系统简述
- §1.2 信号分类与典型确定性信号
- §1.3 冲激函数、广义函数
- §1.4 信号分解
- §1.5 系统分类
- §1.6 线性系统

§1.1 信号与系统简述



- ***Message***（消息）
  - 信源的输出＋语义学上的理解
- ***Signal***（信号）
  - 消息/信息的载体，携带消息、蕴涵消息，或本身即为消息。
- ***Information***（信息）
  - 消息、内容、情报
  - 关注香农（狭义）信息论中关于信息的定义
- ***System***（系统）
  - 由若干个相互作用和相互依赖的组成部分组合而成的具有特定功能的整体。

§1.2 信号分类与典型确定性信号

信号分类 I

- 确定性信号
  - 由确定系统产生、具有确定参数、按确定方式演化的信号。
- 非确定性信号
  - 随机信号
    - 具有不可预知的不确定性。
    - 伪随机（**Pseudo-Random**）信号：?
  - 模糊信号
    - 身高：张三高，李四矮
    - 体重：王五胖，赵六瘦

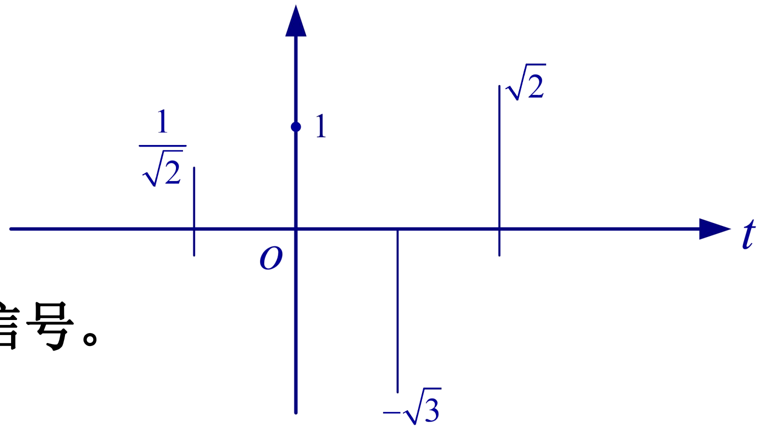
信号分类 II

- 周期信号
  - $f(t)=f(t+nT),\ n\in\mathbb{Z}$
  - **eg**：两个正弦信号的和是否是周期的？
  - 具有周期性的随机信号——伪随机信号。
  - 周期为无穷大的伪随机信号 $\Rightarrow$ ？
- 非周期信号
  - $f(t)\neq f(t+nT),\ \forall n\in\mathbb{Z}$

信号分类 III

- 连续时间信号
  - 模拟信号
    - 时间和幅值都连续的信号。
  - 阶梯信号
    - 时间连续，幅值离散的信号。
- 离散时间信号
  - 抽样信号
    - 幅值具有无限精度的离散时间信号。
  - 数字信号
    - 幅值也被限定为某些离散值的离散时间信号。

抽样信号



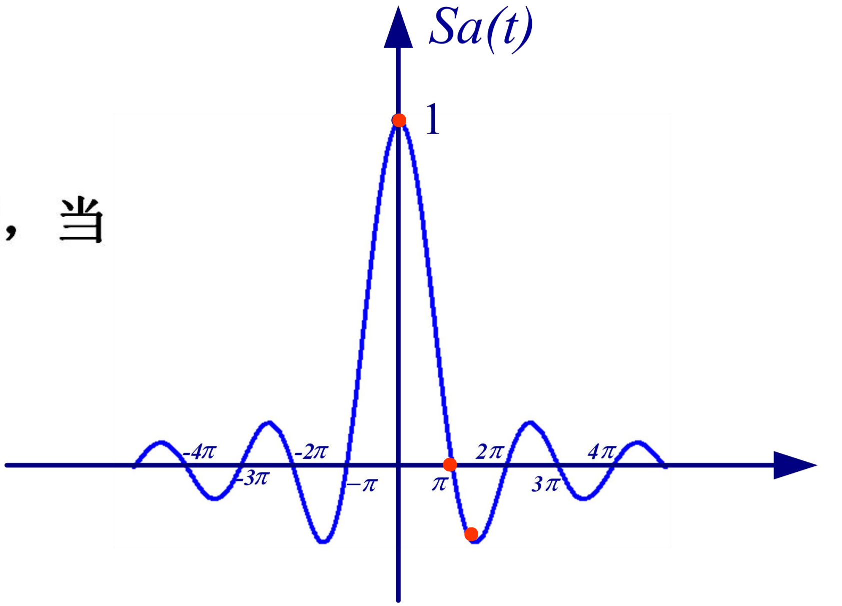
典型确定性信号

- **1.** $f(t) = Ke^{\alpha t}$
- **2.** $f(t) = A\sin(\omega t + \theta)$
- **3.** $f(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ A\, e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \theta), & t \geq 0 \end{cases}$
- **4.** $f(t) = Ke^{st}$

$$= Ke^{\sigma t}\cos\omega t + jKe^{\sigma t}\sin\omega t$$

其中：$s = \sigma + j\omega,\ t \in (-\infty, +\infty)$

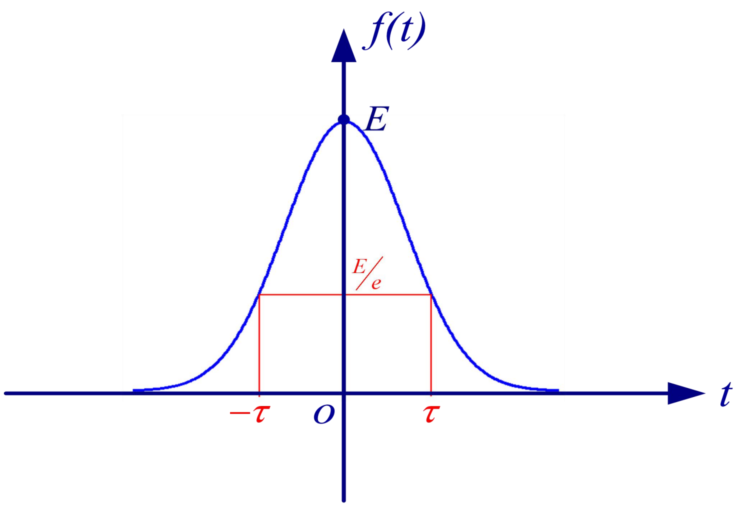
- **5.** $f(t)=Sa(t)\triangleq\dfrac{\sin t}{t}$



  - 采样函数$Sa(t)$为偶函数
  - 在t的正、负两方向振幅都逐渐衰减，当$t=\pm\pi,\ \pm2\pi,\ldots,\ \pm n\pi$时，取值为零。

$$\int_{-\infty}^{\infty}Sa(t)dt=\pi$$

- **6.** 高斯：$f(t)=Ee^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$，速降



  - 速降函数：比任何一个多项式的倒数衰减都快的函数。

$$f(t)\cdot\sum_{i=0}^{n}\alpha_i t^i \rightarrow$$ 高阶无穷小。

  - 高斯函数的傅里叶变换仍为高斯的。
  - 高斯函数为正实函数。

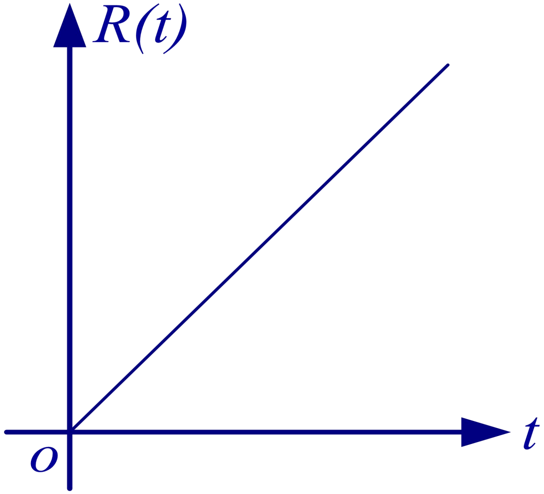
奇异函数

光滑函数：无穷可导，记为 $C^{\infty}(\Omega)$。

奇异函数：非光滑函数统称为奇异函数。

- **1. 斜升函数**

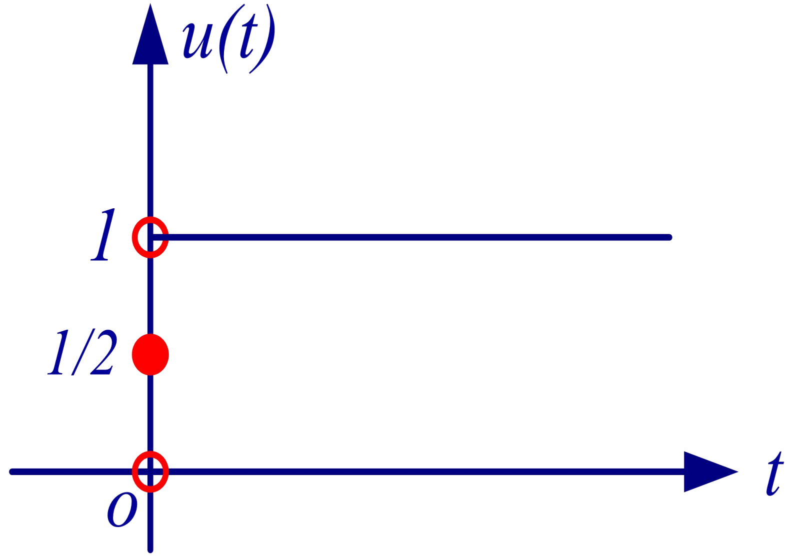
$$R(t)=\begin{cases} t, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$



奇异函数

- **2. 阶跃函数**

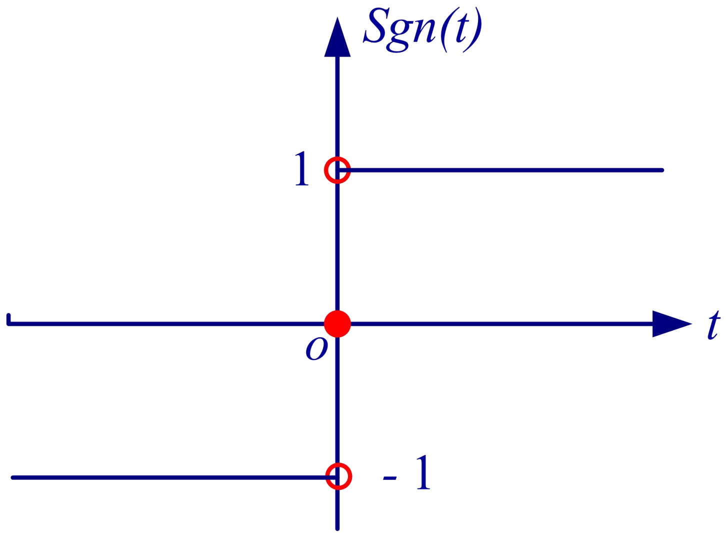
$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\\ 1/2, & t=0\end{cases}$$



奇异函数

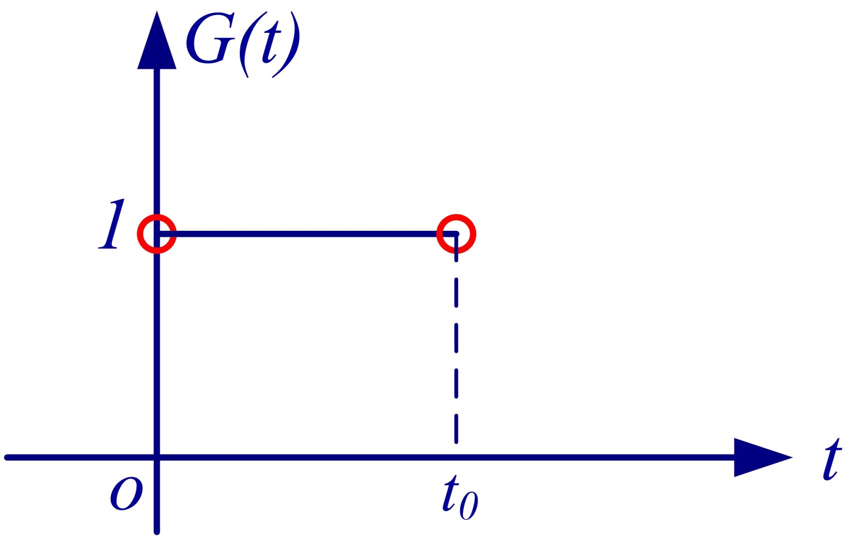
- **3. 符号函数**

$$Sgn(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\\ 0, & t=0\end{cases}$$



奇异函数

- **4. 门函数：** $G(t)=u(t)-u(t-t_0)$，$t_0>0$



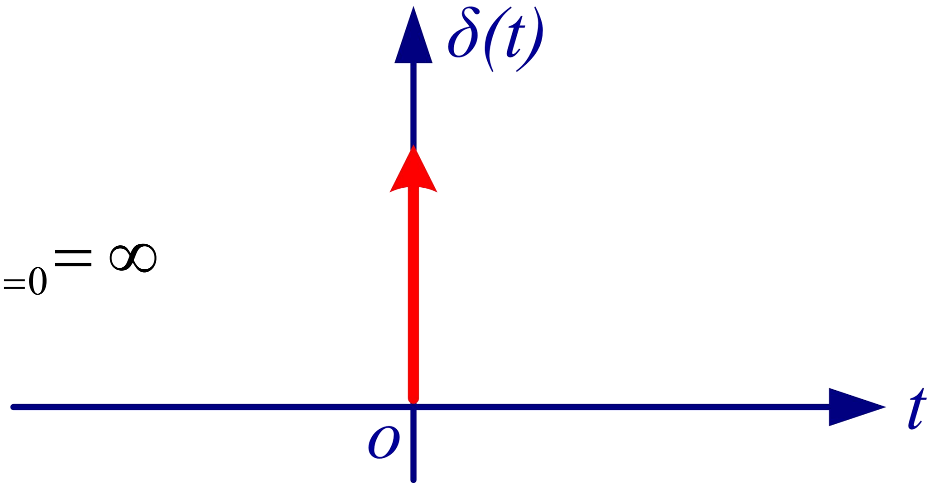
§1.3 冲激函数、广义函数

- 冲激函数的四种定义
- 检验函数的两种定义
- 冲激函数的运算性质

冲激函数的定义——之一

- **P.A.M. Dirac 定义**（直观定义）

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1 \\ \delta(t) = 0,\ t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \ \delta(t)\big|_{t=0} = \infty$$



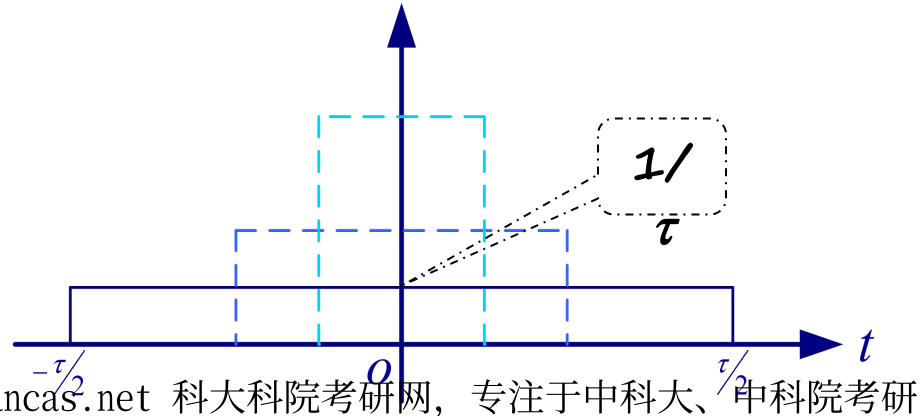
冲激函数的定义——之二

- 用广义极限定义冲激函数：

面积(强度)为1，等效宽度$\rightarrow 0$ 的函数的极限。

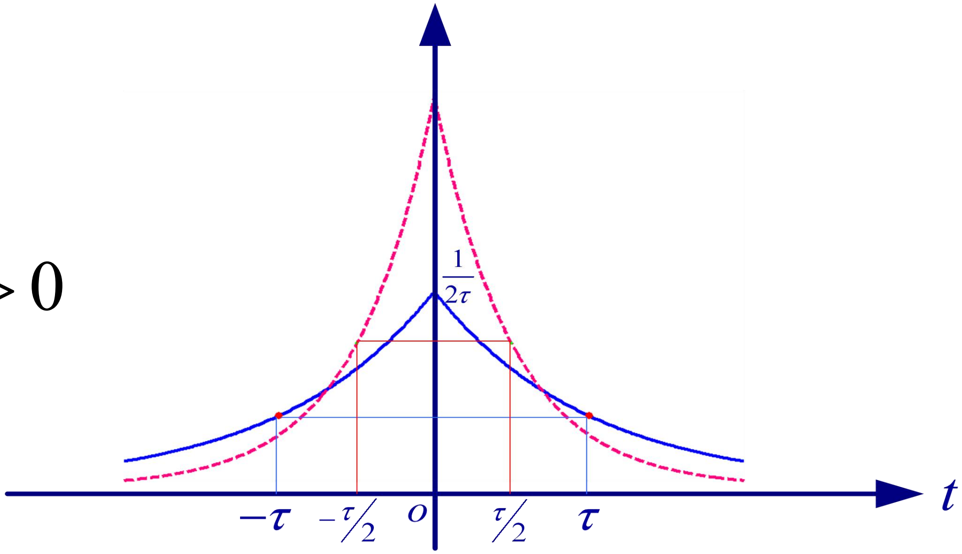
这样的函数可以列出许多：

(1) 矩形逼近 $$\delta(t) \triangleq \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$



(2) 负指数逼近

$$\delta(t) \triangleq \lim_{\tau \to 0}\left[\frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|t|}{\tau}}\right], \quad \tau > 0$$



(3) 高斯逼近

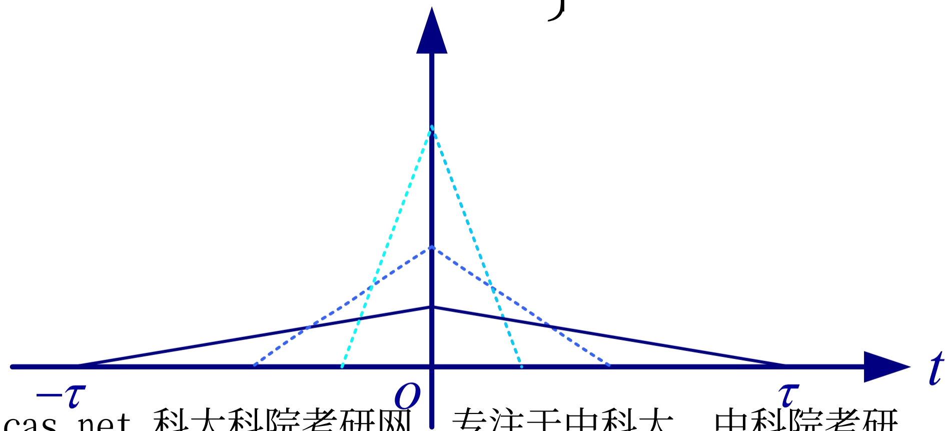
$$\delta(t) \triangleq \lim_{\tau \to 0}\left[\frac{1}{\tau} e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\right]$$

(4) 复指数函数积分逼近（***）

$$\delta(t) \triangleq \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k} e^{j\xi t}d\xi\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\xi t}d\xi$$

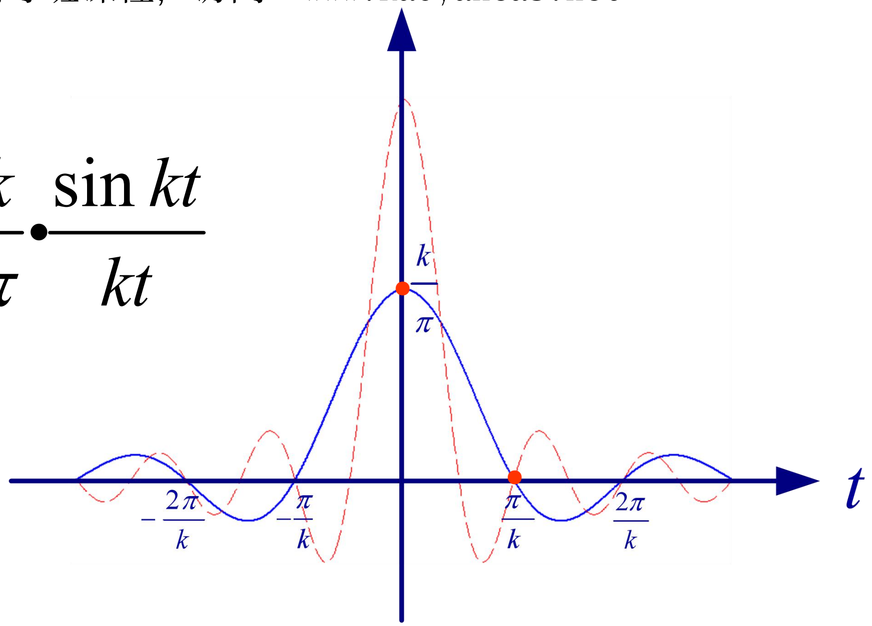
(5) 金字塔逼近

$$\delta(t) \triangleq \lim_{\tau\to 0}\left\{\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)\left[u(t+\tau)-u(t-\tau)\right]\right\}$$



(6) 采样函数逼近（*）**

$$\delta(t) \triangleq \lim_{k\to\infty}\left[\frac{k}{\pi}Sa(kt)\right] = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}\bullet\frac{\sin kt}{kt}$$



(7) 采样函数平方逼近

$$\delta(t) \triangleq \lim_{k\to\infty}\frac{\sin^2 kt}{\pi k t^2}$$

(8) ？？逼近

$$\delta(t) \triangleq \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi\left(1+n^2t^2\right)}$$

冲激函数的定义——之三

- 检验函数的通俗定义（描述性定义）：

  区间 $\Omega=(a,\ b),\ (-\infty<a<b<\infty)$ 上的光滑函数（连续、具有各阶连续导数）$\phi(t)$ 称为检验函数。

  Ω上检验函数的全体记为 D（Ω）。

- 用检验函数定义冲激函数：

  对于$\forall\,\phi(x)\in D\ (\Omega)$，

  若满足：$\langle f(t),\ \ \phi(t)\rangle=\int_{\Omega} f(t)\phi(t)dt=\phi(0)$

  则：$f(t)=\delta(t)$称为冲激函数。

冲激函数的性质

1) 取样特性：$f(t)$有界，在$t=0$连续，则 $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$

2) 尺度变换特性：$\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$

3) 偶函数特性：$\delta(-t)=\delta(t)$

4) 积分性质：$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=\dfrac{1}{p}\delta(t)$

积分算子： $\dfrac{1}{p}\triangleq\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\tau$

5) 微分性质：$\delta(t)=\dfrac{du(t)}{dt}=p\,u(t)$

微分算子： $p\triangleq\dfrac{d}{dt}$

冲激函数的性质

6) 筛选性质：$\langle\delta(t),\phi(t)\rangle \triangleq \int_{\Omega}\delta(t)\phi(t)dt=\phi(0)$ （*）

$$\langle\delta(t-t_0),\phi(t)\rangle \triangleq \int_{\Omega}\delta(t-t_0)\phi(t)dt=\phi(t_0)$$ （*）

7) 复合冲激函数：$\delta[f(x)]=|f'(x_0)|^{-1}\delta(x-x_0)$ （*）

其中：$f(x)$在x_0邻域单调，$f(x_0)=0$、$f'(x_0)\neq 0$

8) 若$f(x)$光滑，且$f(x)|_{x=x_i}=0$，$f'(x_i)\neq 0$，$\forall i=1,2,\cdots\cdots$

则：$\delta[f(x)]=\sum_{n}|f'(x_n)|^{-1}\delta(x-x_n)$ （*）

广义函数基础知识：支集、闭包、检验函数

- **定义**：集合*A*是（*S*,*ρ*）的子集，有内、外、边界、聚点。
  - **闭包**：集合与其边界点的并集称为集合的闭包。
  - **闭包**：集合与其聚点的并集称为集合的闭包。

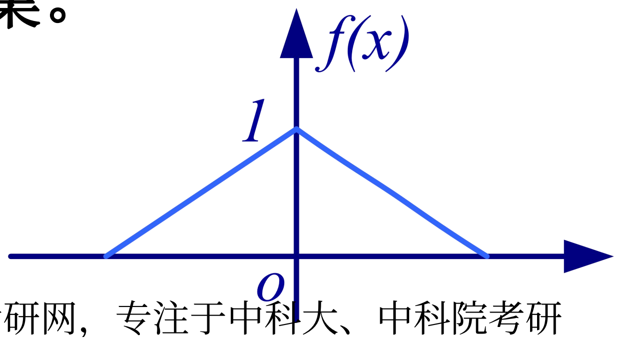
$\left\{X \in R^n \middle| f(x) \neq 0\right\}$的闭包，记为 $\overline{\left\{X \in R^n \middle| f(x) \neq 0\right\}}$ 。

- **支集**（**支撑/承托**，*Support*，supp）：集合 $\left\{X \in R^n \middle| f(x) \neq 0\right\}$ 的闭包，称为 $f(x)$ 的支集（*Support*）。

亦即，把函数支撑起来的那些点集。

例如：

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x|<1 \\ 0 \quad , & |x| \geq 1 \end{cases}$$



- **检验函数**(严格定义)：
  - 设 $\Omega \subseteq R^n$ 是开域，ϕ是Ω上的实（复）函数，具有以下性质：
    - ϕ是Ω上的光滑函数
    - supp$\{\phi\}$是Ω 上的有界闭集（紧支集）

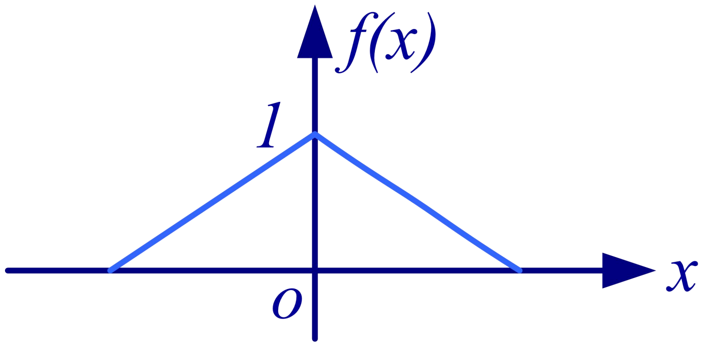
    则称ϕ是Ω上的检验函数。

    检验函数是开域上具有紧支集的光滑函数。
  - 检验函数的全体记为 D（Ω）。

• 检验函数举例

例1：

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$



$$\mathrm{supp}\{f\}=[-1,1],\quad \Omega \triangleq (-\infty,+\infty) \quad \Rightarrow f(x)\notin \mathrm{D}\ (\Omega)$$

例2：

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\exp\left(-\dfrac{1}{1-|x|}\right), & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathrm{supp}\{f\}=[-1,1]$$

$$\Omega \triangleq (-\infty,+\infty)$$

$$f(x)\in \mathrm{D}\ (\Omega)$$

- 广义函数(定义)——函数序列的极限。

若函数列 $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$、函数 $f(x)$ 对 $\forall\phi(x)\in D\ (\Omega)$

均有：$\lim\limits_{m\to\infty}\langle f_m(x),\ \phi(x)\rangle = \langle f(x),\ \phi(x)\rangle$

亦即：$\lim\limits_{m\to\infty}\int_\Omega f_m(x)\phi(x)dx = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx =$

则称：$f(x)$ 是 $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 的弱极限——广义极限；

亦称：$\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ 弱收敛于 $f(x)$；

亦称：$f(x)$ 是 $D(\mathbf{\Omega})$ 上的广义函数。

冲激函数的定义——之四

- 借助于广义函数定义冲激函数：

若$\forall \phi(x) \in \mathrm{D}\ (\Omega)$，有：

$$\lim_{m\to\infty}\left\langle f_m(x),\phi(x)\right\rangle=\left\langle f(x),\phi(x)\right\rangle=\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dt=\phi(0)$$

那么：$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x) \triangleq \delta(x)$

- $\delta(t)$ 是一个广义函数。
- 注意用广义函数定义与用检验函数定义的差别

广义函数的导数

- **广函导数的积分检验**

$\forall \phi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ 在某个 $[a, b]$ 之外恒等于0，考虑 $\mathcal{D}(\Omega)$ 上的广函 $f(x)$，有：

$$\left\langle f^{(n)}(x),\ \phi(x) \right\rangle = (-1)^n \left\langle f(x),\ \phi^{(n)}(x) \right\rangle$$

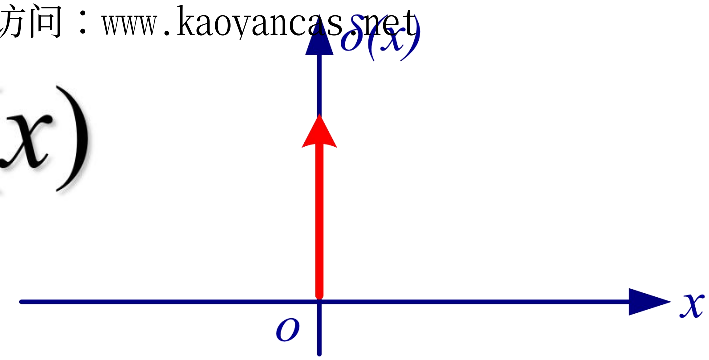
即：$\int_a^b f^{(n)}(x)\phi(x)dx = (-1)^n \int_a^b f(x)\phi^{(n)}(x)dx$

特别地，对于 $f(x)=\delta(x)$ 的情形，有：

$$\left\langle \delta^{(n)}(x),\ \phi(x) \right\rangle = (-1)^n \left\langle \delta(x),\ \phi^{(n)}(x) \right\rangle = (-1)^n \phi^{(n)}(0)$$

意义：将广函微分转嫁给检验函数的微分。

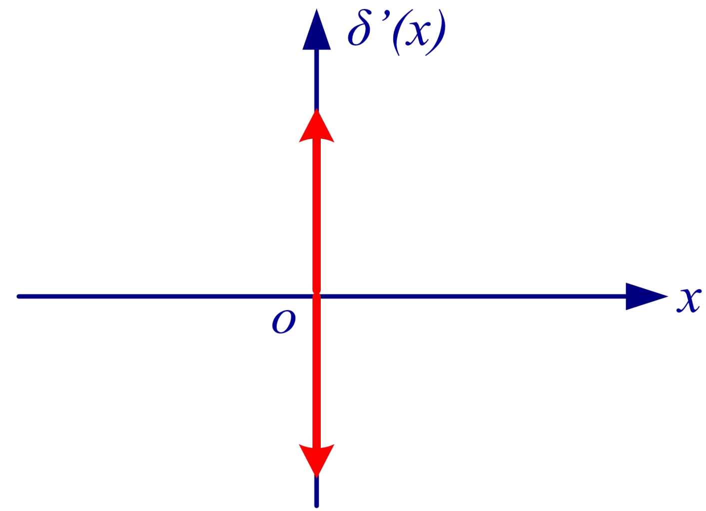
冲激偶 $\delta'(x)$



- 定义：

$$\delta'(x)=\frac{\delta(0)-\delta(0_-)}{0-0_-}=\frac{\infty-0}{0}=\infty$$

$$\delta'(x)=\frac{\delta(0)-\delta(0_+)}{0-0_+}=\frac{\infty-0}{-0}=-\infty$$



- 已知 $f(x)$连续可微，则有：

$$\delta^{(n)}(x)f(x)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(0)(-1)^k\delta^{(k)}(x) \qquad (*)$$

特别地，当 n=1 时：$\delta'(x)f(x)=f(0)\delta'(x)-f'(0)\delta(x)$

证明：……

冲激偶的性质

注意性质成立的条件！
练习推导！

1) $\delta'(t) = -\delta'(-t)$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\,dt = 0$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t-t_0) f(t)\,dt = -f'(t_0)$

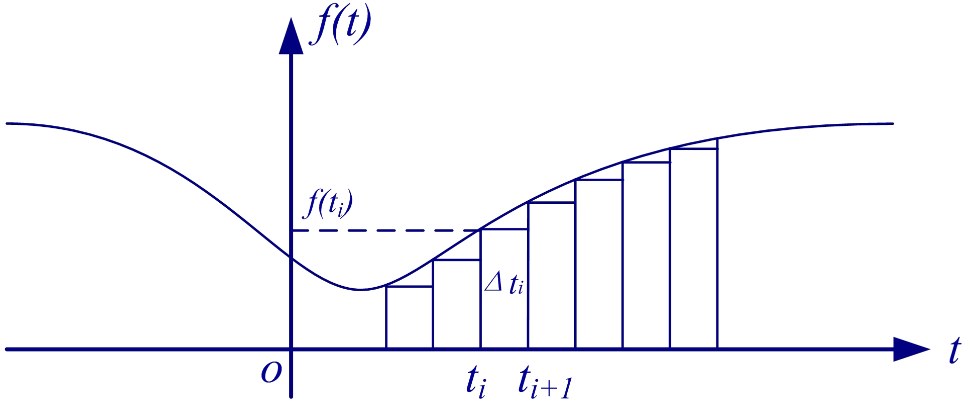
$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t_0-t) f(t)\,dt = f'(t_0)$ （后面用到）

4) $\frac{d}{dt}\left[\delta(t)\phi(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[\phi(0)\delta(t)\right] = \phi(0)\delta'(t)$

5) $\delta'(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a} \delta'(t)$

§1.4 信号分解：简单表示复杂

1. 直流分量/交流分量
2. 偶分量/奇分量
3. 实分量/虚分量



4. 脉冲分解 $\Rightarrow$ $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

（信号与冲激函数的卷积）

5. 正交分解

– 信号可以用完备正交函数集表示

eg: *Fourier* 分析

– 正交分解和脉冲分解的极限形式可通过*Fourier*变换统一。

§1.5 系统分类

1. 简单/复杂 ？
2. 连续/ 离散/ 数字/ 混合
3. 即时/非即时（无记忆/ 有记忆）
4. 集中参数/ 分布参数
5. 线性/ 非线性 ？
6. 时变/ 时不变（定常）
7. 确定/ 非确定（随机、混沌、模糊）
8. 可逆/ 不可逆系统 ？

- 简单系统：利用简化论与还原论方法（整体等于部分和）可以处理的系统。如，线性系统。
- 复杂系统：由数量适当（不多也不少）且具有局部非线性作用的个体元素（agent）组成，并能够产生整体涌现行为的适应性系统。 **1 + 1 > 2**
- 涌现（emergence）：个体之间相互作用使整体产生新特征（性质）的现象。
- 线性系统：具有叠加性和均匀性（齐次性）的系统称为线性系统。
- 非线性系统：不满足叠加性或均匀性的系统是非线性系统。
- 本质非线性：输出增量与输入增量不呈线性关系。
- 系统可逆性：输入与输出一一对应。

§1.6 线性系统

- 系统输入-输出描述

1. 零状态系统：初始储能为零，初始松弛。
2. 零状态响应
3. 单位冲激响应：$h(t)$
4. 因果系统

   因果信号，因果算子
5. 线性时不变（Liner Time Invariant, LTI）系统

$$Y(t)=\mathrm{T}\{X(t)\}$$

$$h(t)=\mathrm{T}\delta(t)$$

- 信号通过零状态LTI系统的输出（推导）

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \quad \left(\triangleq x(t)*\delta(t)\right)$$

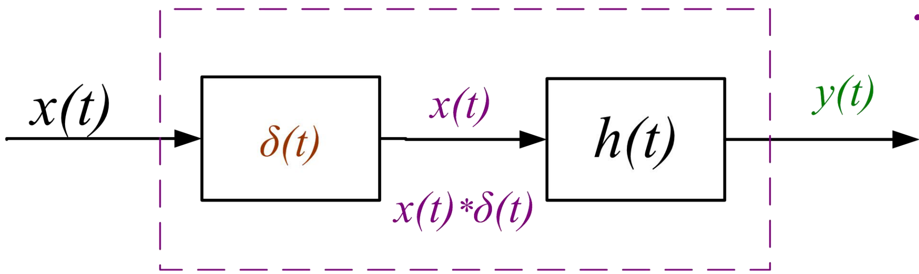
$$\therefore y(t)=\mathrm{T}x(t)=\mathrm{T}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$\overset{\text{线性}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\mathrm{T}\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

时不变： $\mathrm{T}\delta(t)=h(t) \Leftrightarrow \mathrm{T}\delta(t-\tau)=h(t-\tau)$

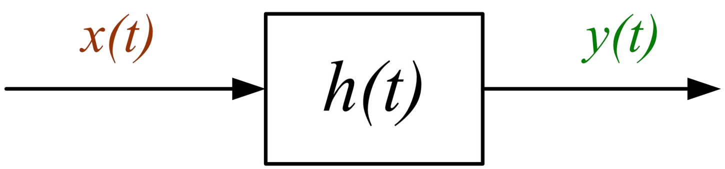
$$\therefore y(t)\overset{\text{定常}}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$$

– 系统零状态响应的变形



$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t) * h(t) \\
&= \{x(t) * \delta(t)\} * h(t) \\
&= \delta(t) * [x(t) * h(t)] \\
&= \delta(t) * y(t)
\end{aligned}
$$

– 时变系统



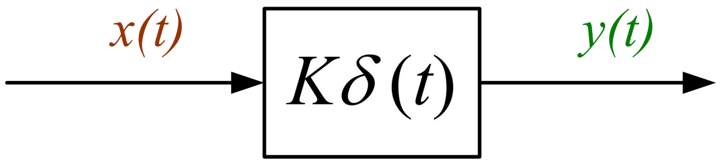
$$\mathrm{T}\delta(t) = h(t),\ \mathrm{T}\delta(t-\tau) = h(t,\tau)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t,\tau) d\tau$$

–对于线性/非线性、时变/时不变系统，均可定义冲激响应$h(t)$，但只对LTI系统有：$y(t)= x(t) * h(t)$

常见典型系统功能：

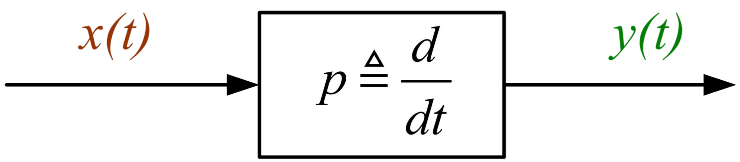
– 放大器



$$h(t)=K\delta(t)$$

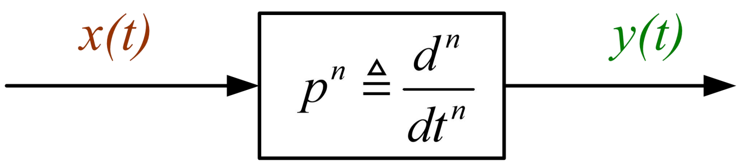
有：$y(t)=Kx(t)$

– 微分器



$$h(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)=\delta'(t)$$

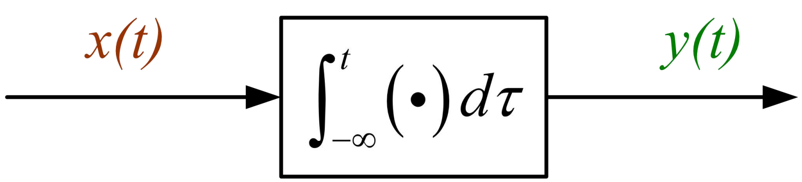
有：$y(t)=x'(t)$



$$h(t)=p^n\delta(t)=\delta^{(n)}(t)$$

有：$y(t)=x^{(n)}(t)$

– 积分器



$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=u(t)$$

有：$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$

End of Chapter 1

Thx~ 4 Ur Attention.